

〔論文〕

新たな認識論理の構築 15

——数学概念をモノ化する 複素平面の認識論的解釈——

鈴木 啓 司

名古屋学院大学国際文化学部

要 旨

「モノそのもの」であることを表現する言語の構築を目指す新物質主義の思想にのっとり、数学概念のモノ化を目指す。数学は特定の指示対象をもたぬ極めて抽象的な言語であるだけに、逆に人間という「モノそのもの」の内奥から湧き出、それを映し出している言語であると考えらるからだ。具体的な対象として、実数、虚数を合わせすべての数を表示する複素平面を取りあげる。認識論的存在論から話を起こし、実数を自己に、虚数を他者になぞらえて解釈する。当初は「あちら」と「こちら」という原始的世界他者意識が、のちに両者が交叉し、中間に「自己」意識を結ぶ。自己とは他者＝世界の後付けで生まれたものである。通念とは逆行するこの虚数から実数へという流れを、複素平面のなかに読み込む。こうした観点から、オイラーの公式、さらにはリーマン予想にまで言及する。

キーワード：複素平面、認識論、存在論、新物質主義

Building a new epistemic logic 15

——An epistemic interpretation of the complex plane for *materializing* mathematical concepts ——

Keiji SUZUKI

Faculty of Intercultural Studies
Nagoya Gakuin University

発行日 2018年1月31日

緒言

本篇は『新たなる認識論理の構築』シリーズの第十五篇にあたる。共有知識のより本質的な形式化の試みから始まり、認識を「人間というモノそのもの」である状態の謂いであると見なし、その「モノそのもの」であることを表現する言語の構築を目指す新物質主義にいたった本シリーズは、本篇で数学概念のモノ化に挑む。なぜ数学かというと、前篇¹⁾の結びでも触れたように、数学が具体的な指示対象をもたぬ最も抽象的な言語だからである。そのことが逆説的に、モノそのものである人間存在の深奥から湧き出る物質的言語であることを強くうかがわせる。数学には、認識を支える身体的条件が色濃く反映されているのである。

こうした方向性の重要な先達として、G. レイコフ、R. ヌーニェス共著になる『数学の認知科学』²⁾がある。本書において著者たちは、数学の抽象概念が身体的経験に基づいて形成され、そのときメタファー的思考（「四則演算はものの集まりである」といったメタファーなど）が本質的役割を果たしていることを説得的に論じている。示唆に富んだ指摘である。だが、筆者は正直、まだ何か物足りなさを感じる。それは、数学概念が身体的メタファーの積み重ねによる結果であるという彼らの主張にある（そのため、やたらと多くのメタファーの種類が出てくる）。筆者は、数学概念はもっと物質による認識的条件の本質的基盤に根差したものであると考える。メタファー的解釈よりもっと深く掘り下げられるということである。それは、数学概念のカタチ自体が、人間というモノそのものの在り方を直截に表していると言い換えてもよい。身体的カタチになぞらえるメタファー的解釈は、むしろそこから出てくるのである。

数学概念に認識のカタチ（人間というモノそのものであること）を探るべく、複素平面を対象に取りあげる。そこには実数、虚数合わせ、すべての数が表現されているからである。数学はこの平面上で展開されるといってもよい。そこで複素解析上の重要概念の認識論的解釈を試み、最後には大胆至極にも、あのリーマン予想の認識論的解釈にも触れてみようと思う。

認識の存在論的解釈

まず、存在の内部状態としての認識というものについて考えてみよう。そのとき問題となるのが、今無造作に使った内部、そしてその対立項となる外部という概念である。いったい、内部と外部の線引きはどこにあるのか。この積年の問いは、アприオリに主体、自己意識なる内部があると思いつくことから生じる錯誤であると、筆者は考える。そこで、意識なるものの成立を唯物的存在論の視点から追ってみよう。

そもそも最初にあるのは、存在である。トートロジックな言い回しになって恐縮だが、それほどすべての起点であるということだ。そこでさまざまな現象は起こる。意識というものが芽生える端緒は、もちろん生物の段階からである（このあたりは分野外なのはしよって論を進める。筆者が哲学的視点から想像的に思考したことである）。初期段階の現象（刺激、作用）は、もっぱら「あちら」からのものである。原生物に見られるように、外界の刺激に反応して動く。だが、彼らにあっては、外

界も内界もない。ただ現象があるのみである。そこから神経組織がより進化すると、「こちら」の意識が芽生えてくる。あちらから来る、だけでなく、こちらから行く、というわけだ。分かりやすい例でいうと、ただじっと待ち伏せしてあちらから寄って来た餌を取るタイプと、こちらから積極的に動いて餌を狩るタイプだ。この「こちら」に自己意識の萌芽はある。それは、敵から逃れる、という場合に顕著に表れる。こちらに守るべき（それが絶えるとすべて終わりに等しい）ものがあるという意識だ。最初は内も外も不分明な総体的な存在があり、そこにあちら、そしてこちらの意識が芽生え、個々の生物、人間へと発展してゆく。

ただそれにしても、人間の自己意識の強さは、他の動物と比べても格段に強いものがある。この違いはどこからよって来るのであろうか。それは逆説的に聞こえるが、他者の存在を意識することからである。われわれは多分に他者の目を通して自己を確認しているところがある。自己と対等な存在としての他者を認めるから自己意識はより強くなるのである。これは単に、あちらとこちらの対比からこちら側に生じた即物的な感覚とは違う。あちらとこちらという空間的な無色透明の位置関係の中間に生じた、むしろ抽象的な意識である。換言すれば、前面の他者の視線と後面の他者の視線の交叉地点に立ちあがったホログラムのごときものである。他者、すなわち、世界＝存在がまずある。その世界内存在にあって、存在を意識する存在が生まれた。その意識は必然的に局所的なものにならざるをえない。なぜなら、全体を意識するということは、その意識を意識するという無限行程を招き寄せるからだ。意識とは局所的なものである。それが、もっぱら前面から入ってくる情報の源であるあちらに対し、こちらにその受け取り手である自己を押し込める(そのとき大きな役割を果たしているのが、情報センサーである身体である)。だがわれわれは、背後にも世界が広がっており、後面の他者の視線(これが真のこちら側だ)があることも意識の片隅にもっている。そこから見た自己を想像できる³⁾。360度世界に囲まれた存在であることを知っているのだ。他者の視線の交叉点である自己だからこそ、他者の視点にも容易に立ちうるのである。それは、自己が両他者視線にとって互いの自己であり他者であることでもある。これが人間というモノそのものの内部状態である。

そこで例によって、そのイメージ図を描いてみよう。筆者は以前に、認識の2視点3次元モデルや、自己と他者の2視点直交モデルを提出した⁴⁾。しかし、それらは今思えば、他者と自己というア priori な二元図式にはなから陥っていたらみがある。前稿では、自己の視点に90度で交わる他者の視点は右側でも左側でもよいというふうに書いたが、本当はこう描くべきであったろう(図1参照)。

最初にあるのはあくまで、存在＝世界＝他者である。そこに生物の登場とともに感覚が生じ、存在の意識となり、それは必然的に総体的でなく局所的であるがゆえに、やがてあちらとこちらの意識へとつながってゆく。原初の2視点とはこのことである。そしてさらに人間は、この2視点の交叉点に自己意識なるものをもつにいたったのである。すなわち、自己こそが後付けなのであり、こう考えることによって、自己をめぐるアポリア(その淵源、来歴など)はかなり解消できるような気がする。このあたりのことはもっと詳述する必要があるだろうが、それはまたの機会に譲るとして、本稿ではこの認識モデルに基づいて、人間というモノそのものの内部表現としての複素平面解釈を以下に展開してみよう。

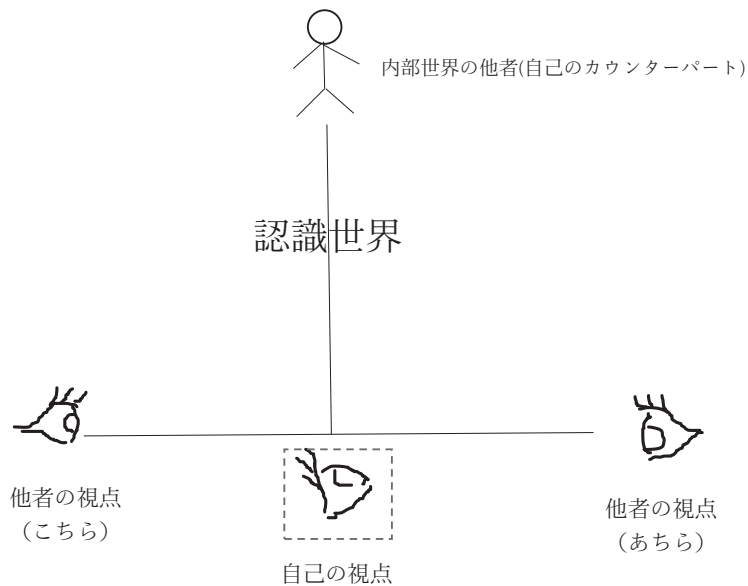


図1

複素平面の認識論的解釈

複素平面とは、実数と虚数を組み合わせた複素数を2次的に展開したものである。実数はわれわれを取り囲むこの実世界を表した数として容易に納得できようが、問題は虚数である。自乗してマイナスになる数とはいったい何なのか。虚数に与えられる記号*i*の起源である imaginary number という名称からも分かるように（ちなみに、この名付け親はデカルトである）、それは長らく想像上の数として、その実在性は認められてこなかった。筆者の学習経験からいっても、2次方程式を解く際にときどき使用するか、3次方程式の解の公式に登場するか、要するに、計算上の便宜的手段ぐらいの印象しかない。しかし、数学はもとより、20世紀に入ってからは、量子力学という最先端の物理学のなかでその実在性が認められてきたことはつとに知られていよう。筆者も、認識論の観点から、自己の世界認識の基本構造である絵と地の地にあたる負数を生み出す他者の存在としての虚数ということで、その存在意義を説いてきた。せんじつめれば、認識された世界を表現するのが実数だとしたら、虚数は認識の仕組み自体に関わる数といえよう。そのあたりのことはのちに詳述するとして、まずは、実数に虚数を加えた複素数を考えることで数学の世界が広がり、その結果数学の基盤である人間の認識構造を垣間見せてくれる代表例から話を始めよう。

1. オイラーの公式

オイラーの公式とは次のものである。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

左辺は指数関数であり、右辺は三角関数である。それが両辺に登場する虚数記号*i*によって=で結ばれている(ちなみに θ は角度を表す。 x で表示してもよい)。これがこの公式の眼目である。というのは、実数面では似ても似つかない軌跡を示す指数関数と三角関数が、複素平面上で一つになるということをおのこの式は表わしているのである。視野を広げることによって、あるいは地盤を掘り下げることによって、それまで見えていなかった関係性(構造)が姿を現す好例である。このことを、数学的詳細は類書に譲るとして、認識論的見地から追ってみよう。ちなみに、数学の三大重要数といってよい π , e , i を一つの式にまとめたことで、最も美しい数式とつとにいわれるオイラーの等式

$$e^{i\pi} = -1$$

は、このオイラーの公式の θ に π を代入したものである。

指数関数とは、自然対数の底 e のべき乗のことである。 $e = 2.71828\dots$ は、われわれになじみ深い10を底とする常用対数に対して、自然科学の分野で普通に使われているものである。その来歴はおくとして⁵⁾、意味合いを直観的に実数面の上で跡付けてみよう。下図は $y = x$ の表である。

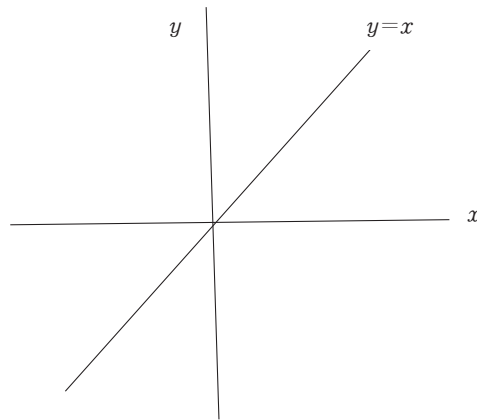


図2

これを原点0から y 軸上に1あげて、この線を接点 $(0, 1)$ での接線 $y = 1 + x$ としてもつ曲線を考える。

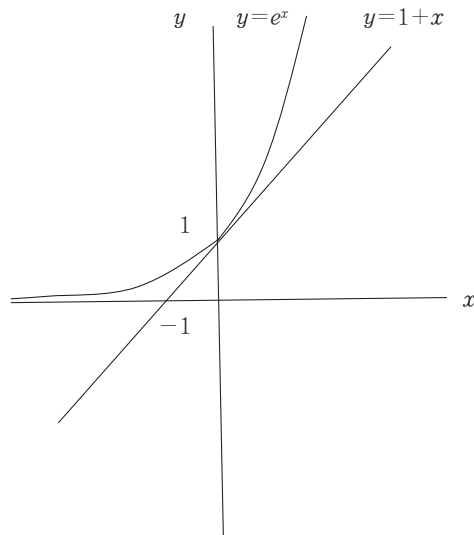


図3

これが指数関数 e^x を表す曲線である。 $y = x$ が1(あるいは-1) + 1 + 1 + ...の足し算の基本線なら、 e^x は $e \times e \times e \dots$ の掛け算の基本線といえよう。そのとき、1(あるいは-1)は足し算の基本単位で、 e は掛け算の基本単位となる。 e^x が掛け算の基本線であるとは、この指数関数が微分しても形が変わらないということからもうかがえる。微分とは、大ざっぱに言えば、曲線からミクロの直線を取り出す作業だが、それを経ても形が変わらないということは、究極の曲線といってよいであろう。

これに対し三角関数は、原点0を中心とする単位円(半径1の円)における角度(θ)が定める動径と円との交点による関数である。分かりやすくいうと、半径が中心点の周りを回転してゆくときに x 軸と作る角度と、円周上をたどる点(座標 x, y)の関係式である(半径と x, y が三角形をなすからこの名がある)。オイラーの公式にも登場していた代表的な三角関数sine(正弦関数)、cosine(余弦関数)の表は、次のようになる。

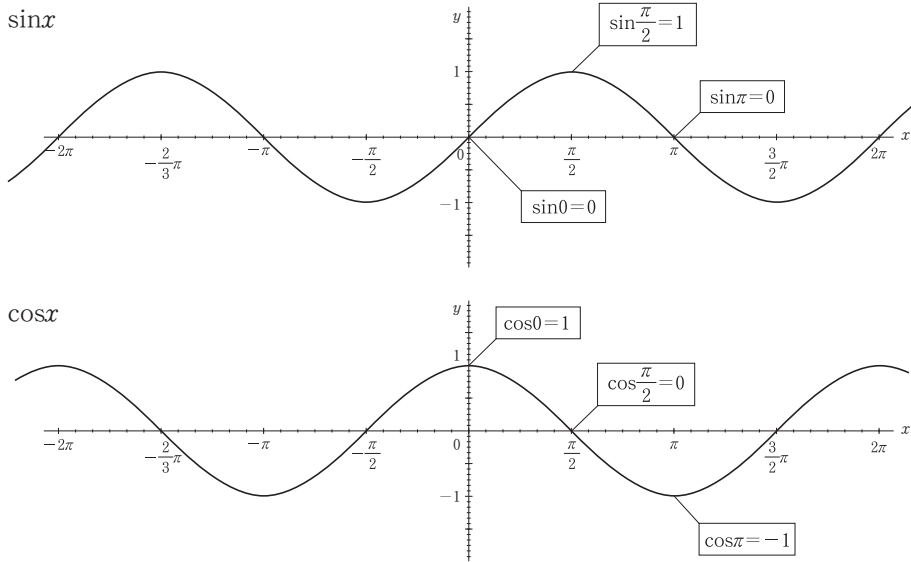


図4

参考文献リストの「Newton」2017年10月号より

かように、指数関数、三角関数は実数面上ではまったく違う形をしているが、それが複素平面において眺めると、指数関数が円形に収縮するのである。実数面での e^x の x は実数軸を渡ったが、これが虚数も加えた複素平面で考えると、虚数軸上の i （長さ1）を半径とした円となる。これを視覚的にイメージすると、虚数軸とは実数平面（2次元）の原点0に垂直に直交する第三の軸であり、それにそって上昇してゆくと、実数平面が実数軸へと収縮し、それとともに指数関数線も円形に収縮してゆくさまが想像される。そしてその円筒中に波である三角関数が3次元的にらせんを描いて包み込まれる。それを再び2次元平面に落とし込んで描いたのが、複素平面なのである。ちなみに、収縮した結果である単位円で見ると、オイラーの等式は1から円を半周して（半径が1なので半円周が π となる） -1 にいたることを表していると具体的にイメージできる。

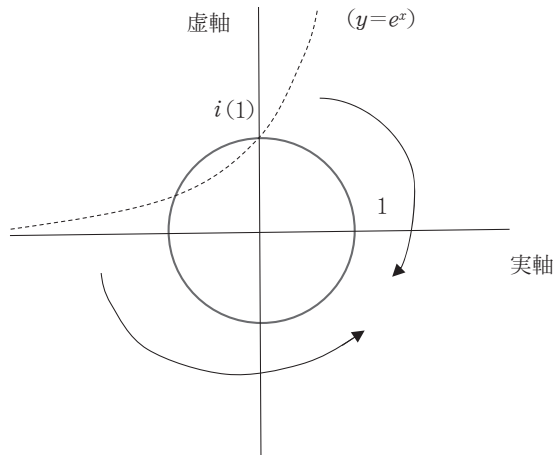


図5

これら一連の流れのなかに筆者は、手前みそになるが、筆者が本論文シリーズで提示してきた、(1)のベキ乗場から自己と他者の直交モデルにいたる軌跡を見る。掛け算が土台であるという(1)のベキ乗場、

$$1^{0+1+1+1\dots=1^n}$$

.....

$$(1) \times (1) \times (1) \times (1) \times \dots = 1$$

からすると、指数関数 e^x の方が先にあり、その(0, 1)での接線 $y=1+x$ が後発で設定されたかに見える。0ではなく1が起点となっている(0乗は1となる。あるいは掛け算の単位元は1である)ことは、掛け算が原初の存在1を基盤にした計算であることを思わせる。掛け算にとって0は、すべてを無に帰す危険な数なのである(0とは存在を分かť境界であることは、前稿で触れた。1⁰の0が、ベキ乗場の上下を分かť境界となっている)。そもそも自然界にあるのは曲線であり、そこに計算しやすい直線を見出してくるのが、従来の数学であろう。しかし、認識論的には、やはり根底には曲線=掛け算(ベキ乗)があるのである。そのことは、数学が成立してのち、上のベキ乗場の(1)にさまざまな具体的数(常用対数の10、情報科学のビット2など)が代入され、世界を測る重要かつ便利な認識スケールとなっていることからもうかがえよう。自然界を測るには e が最適というわけである(直線、曲線、計算しやすさ、といったことの認識論的意味についてはまた再考してみたい)。さらにその奥の世界認識次元において、複素平面の実数軸と虚数軸の直交が、自己と他者の視線の認識論的直交モデルに重なることについては前稿で論じた。

だがここで、新たな疑問が湧いてくる。どうしてそれらは最終的に円の形に収縮するのであろうか。原点0を中心とした平面思考では、それは無限に外に向かって広がってゆくような気がする(現に広がっている)。これに対する認識論的解釈として、筆者が以前に提唱した2視点3次元モデルを再登場させたい。2視点が3次元球の2極のように向かい球体内部を見ている。それら2極の反復反転が

4次元目の時間進行になるわけだが、2極が対等で両者中心であるという点で、楕円球モデルの方がより適切であろうことは、そのとき触れた。2視点であるからこそ、それらは無際限に外に広がるのではなく、互いに限定しあい均衡を保ち安定した円、球体にまとまるのである。ただ、以前はこの2視点を当初から自己と他者というように振り分けていたが、本論の冒頭でも述べたように、それらは本来、「あちら」と「こちら」という、世界＝他者の存在認識の基盤のことであり、自己はそれらの交叉の中間に立ちあがる後付けの像である。そんな自己がわれわれの生において圧倒的の重みをもっているのは、認識の基盤である「あちら」と「こちら」という他者2視点が対等であるがゆえに相殺しあい背景に退き、その地の上に浮かびあがる絵である自己がもっぱら目を引くからであろう。以後は自己中心の1視点世界像が幅を利かせることになるわけだが、原点0を中心とした従来の数学もこの産物である。オイラーの公式も、虚数という次元からより深い数学の構造をあらわにしたが、やはりこの1視点的数学の領域にとどまったものといえる。

2. 2視点複素平面

前段の流れを受けてここで、修正版自己・他者認識論モデル（図1）をあらためて複素平面へ投影した図を掲げておこう。

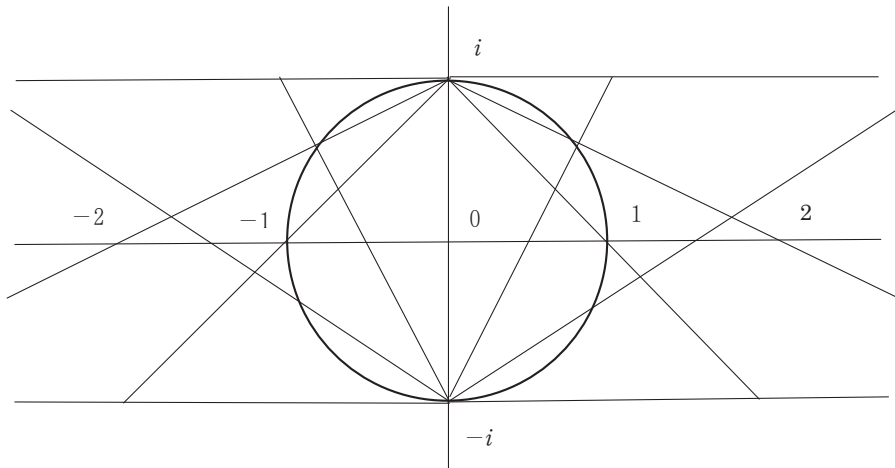


図6

以前は、他者の視線は左右どちらに設定してもよいとしたが、正しくは左右（あちら、こちら）両方から来るのであった。よって複素平面への投影においても、単位円を掃くのは*i*のみでなく*-i*からの斜線もある。認識モデルに即した名称でいうと、「あちら」と「こちら」という二つの他者視線が、土台としての存在を表す(1)のベキ乗円（以後ベキ円と呼ぶ）を掃き、互いの中間交叉点に自己という実数線を結ぶ。以前の図ではアプリアリに実数線を設定していたが、正しくは、それは2視線の交叉により浮かびあがる射影図のようなものなのである（この2視線が垂直に対峙し影がなくなるのが、原点0である）。この2視点という見方が、複素平面を認識論的に解釈するうえで有効である。

2視点是对等な中心点であり全体は楕円モデルであると先に述べたが、そこから図6は2円が重なっているものとする。その2視点が対称（ならびに対照）関係にあるということで、2円は互いに逆回転しているものとする。これは複素平面で、 i を掛けることが実軸と虚軸を左回りに移動し、 $-i$ を掛けることが右回りに移動することに相当する。この原図から図6にいたる過程を以下に示そう。原図は実は2球の俯瞰図であり、中心点は極にあたる。その横からの断面図が変容過程の図である。その2球を接点を蝶番のようにして重ね合わせ相互に埋め込む。そこに2球が生む運動の方向、実数線を加えてできたのが、図6である。

原図

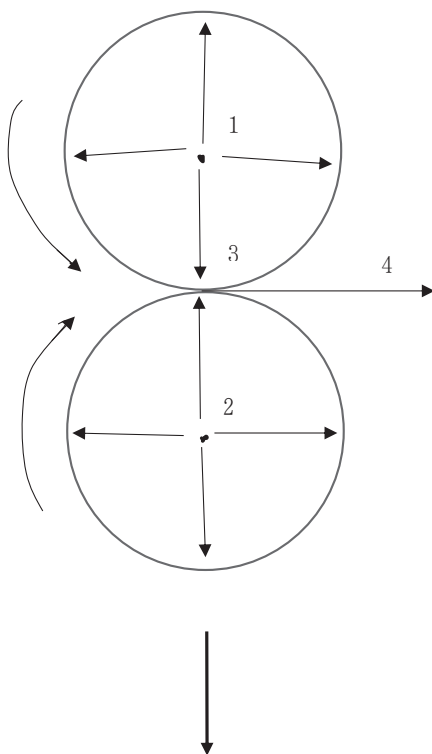


図6への変容過程

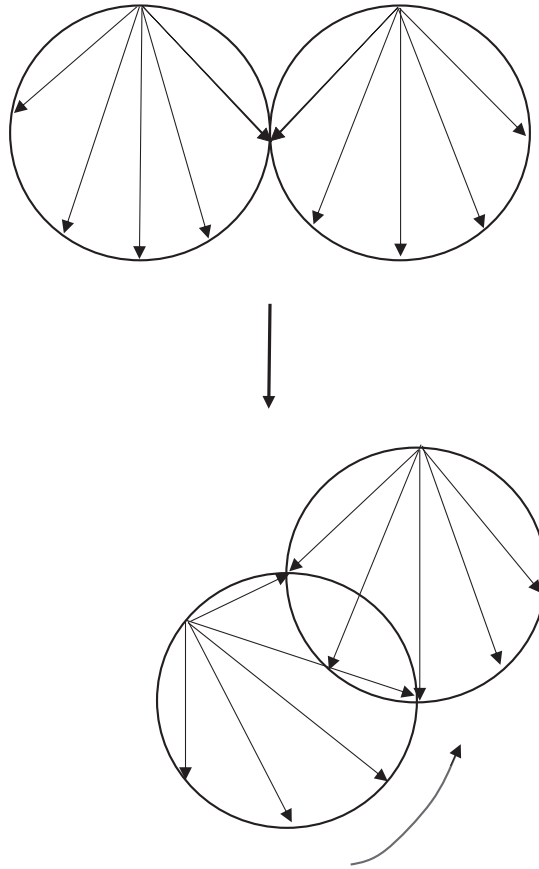


図7

かように、2円（「あちら」と「こちら」の他者）が逆回転しているからこそ垂直軸に水平方向の同一運動が生まれる。これが実数直線（自己）である。ちなみに、原図に番号が振ってあるが、これは次元の認識論的（人称的）解釈を意味している。二つの視点（極）が1次元、2次元の主観をなし（両者はだから反転してもよい）、2円の接点が共通部分の3次元空間（この実世界＝客観）を生み、その回転運動が4次元方向としての時間を繰り出している。だが、正確には、先にも書いたように、二つの他者視線が合わさる3こそ自己なのである。時間もそこを流れている認識的現象である（時間のなかで運動は成立しているのではない。内部の回転運動が時間を紡ぎ出すのである）。結局、人間は自己の認識する世界こそが絶対であり客観なのであり、そこでしかものを論じられない。すべて（筆者の思考も含め）はそこに映る影絵のごときのものであって、これが自己の有する特権的地位の強さ、重さにつながっている。もしそこからの脱却を望むなら、自己自体を影絵として見る2視点認識論の考え方がその一助となってくれるものと期待する。

上記のことに少し数学的説明を補足すると、筆者はここでゆくりなくも、複素解析において重要なコーシーの積分定理を思い出す。それは数式にすると次のようなもので、

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

言葉にすると、「積分路が閉じていて（積分記号に付いている○がそれを表す）、その内側に特異点があれば、積分の結果は0である」といった意味合いだが（厳密には「正則」といった条件がつく）、これとてピンとこないであろう。要は、この論文の趣旨にそっていうと、以下のようなだろうか。ある面積を囲った線に方向付けをして（たとえば左回り）、それを囲い線の内側を指すものとする。その内側の面積を計算するにあたって、次のように考える。同方向に向き付けされたマイクロの小片が多数集まってこの面積は成立していると。すると隣りあう小片の接する辺は互いに反対方向を向くことになる。そこで両者は相殺しあって0になり、ひいてはそれら小片の集まりである全体も0になるというわけである。図示すると、次のようになる。

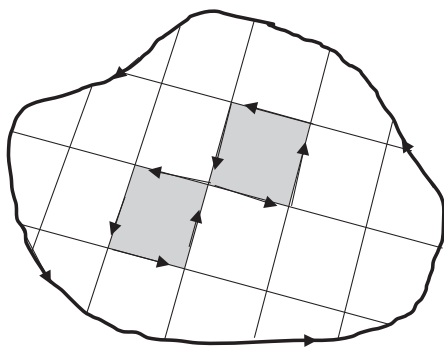


図8

ちなみに逆方向に向き付けされた部分を近傍とするのが特異点である。

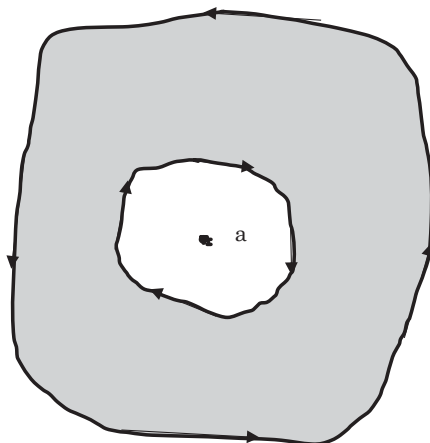


図9

ここから認識論的に読み取れることは、すべてが同方向では何も浮かびあがらず、そこに逆方向がまじることによって何らかの絵（認識の対象）が生じるということである。そういった意味で、逆回転

する2円は互いの特異点領域であり、そのことを自己対他者という絵で認識しあっているのである。

また、2視点という見方は、数学ひいては論理を問答として捉えることを可能にする。証明とは、まさに内的問答であろう。実際、問答論理というものもある⁶⁾。そして、複素平面そのものも問答という観点から見直すことができる。複素平面上の複素数は大小を表していない。それらが示しているのは位置である。複素平面とはいわば数の地図のようなものであり、地図である限りは目的地にいたる道程が重要となる。特に π や e など超越数といわれる、地図上にピンポイントで点描できない数の場合は、そこに限りなく近付くことを可能にする道案内ともいうべき数式が必要となる。それが無限級数である。これは、ある一定のパターンを踏んだ無限に続く足し算からなるもので、たとえば、指数関数は以下ようになる（関数をこのように無限多項式で表す方法をテイラー展開という）。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

e 自体の値を出すには、 x に1を代入してやればよいわけだ。三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は次のようになる。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \dots$$

このある一定のパターンを踏んだ無限に続く項の連なりに、何か問答めいたやり取り、あるいは互い戦のゲームの先手、後手の応酬にも似たものを感じないであろうか。特に三角関数は+と-が交互に繰り返され、二つの視線の反転が作り出す波のうねりをよく表している。複素平面という数の地図は、2視点の交互反転が跡付ける道筋で埋められているのである⁷⁾。その掉尾を飾るものとして、オイラーの等式の道筋を眺めておこう。ここにはまさに、「虚数の足し算と引き算」と「実数の足し算と引き算」が交互に繰り返され回転の軌跡を描きながら-1に近付いてゆくさまが見て取れる（無限項の足し合わせで見ると、先に述べた単位円周を半周する軌跡となる）。筆者には、これは直交する二つの視線の無限に続く反転と映るのである。

$$e^{i\pi} = 1 + \frac{i\pi}{\textcircled{1}} - \frac{\pi^2}{\textcircled{2}!} + \frac{i\pi^3}{\textcircled{3}!} - \frac{\pi^4}{\textcircled{4}!} + \frac{i\pi^5}{\textcircled{5}!} + \dots = -1$$

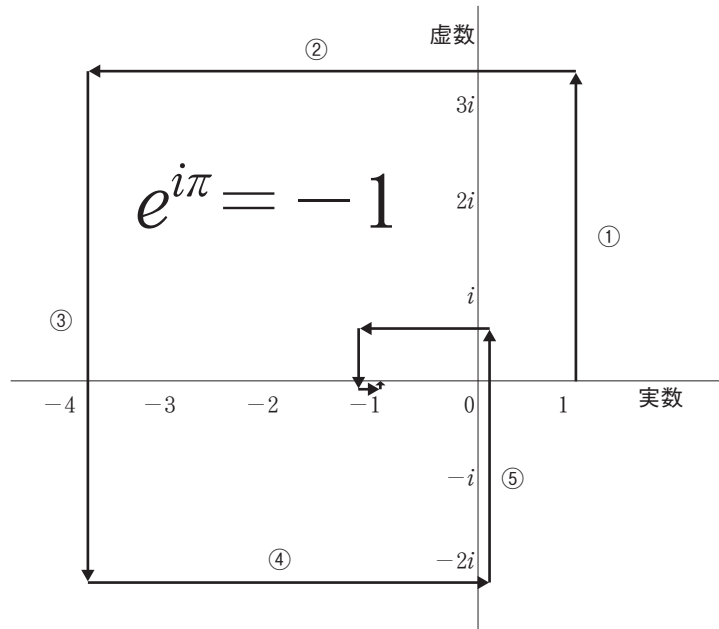


図10

参考文献リストの「別冊Newton こんなに便利な指数・対数・ベクトル」より

3. リーマン予想

最後に、複素平面上（すなわち数学上といってよい）最大の未解決問題について、この2視点認識論の立場から一言触れておきたい。それはいうまでもなくリーマン予想である。言葉でいうと次のような内容となる。

「ゼータ関数の本質的零点の実部は、すべて1/2である。」

といっても、何のことやらこれでは分からない。これを図示すれば、以下のようなになる。

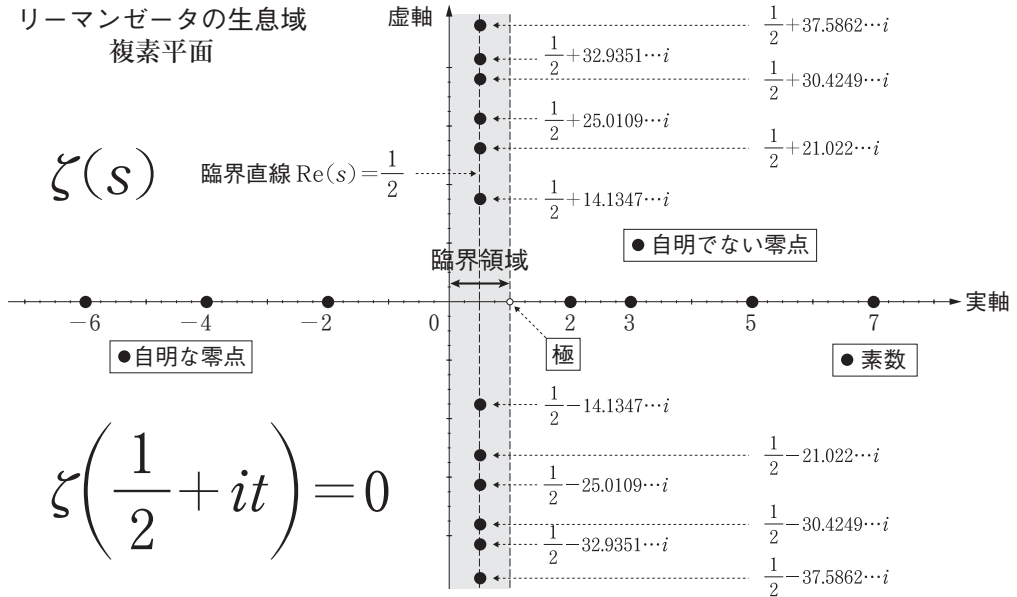


図11

参考文献リストの「数学セミナー増刊 リーマン予想がわかる」より

この予想を理解するには、もちろんゼータ関数、本質的零点の意味を知らねばならないわけだが、その数学的解説は筆者の手に余るので類書に譲るとして、ここでは例によって認識論的解釈を、牽強附会の誇りもものかわ、大胆に展開しよう。

ゼータ関数とは次のようなもので、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

要するに、自然数のべきの逆数の無限和である。このsに複素数を代入して、この関数がどんな値に収束するか、あるいは発散するかの研究が行われてきた。正確にはこれはリーマン・ゼータ関数と呼ばれるもので、ゼータ関数には無数の種類があるが、それらはすべてこのリーマン・ゼータ関数のヴァリエーションといってよい。この関数の重要性を一言でいうと、複素平面という数の地図上の最も有能な導き手といったところであろうか。それは、ゼータ関数が素数によるオイラー積と同値であると判明したことによっても如実にうかがえる（素数に関わっているオイラー積からも、やはり数の根底にあるのは掛け算だと思われる⁸⁾。そして零点とは、その関数が0に収束するx（ゼータ関数の場合s）のことである。それは根ともいって、方程式の解と同じようなものだ（たとえば $x^2 - 2 = 0$ のx）。いわば、関数全体の基点である。その零点に、ゼータ関数の場合、自明なものと本質的な（自明でない）ものがある。自明な零点は図12に示したように、負の偶数に位置する。自明とは数学的に明白だというぐらいに受け取っておいてほしい。問題は本質的零点の方である。それが図にあるように、すべて実部は1/2の虚数軸（臨界直線と呼ばれる）上に並んでいるというのが、リーマン予想である。そして、今日まで兆単位の数の零点が見つかったが、反例はまだ発見されていない（ちなみに、

臨界直線上に零点が無限に存在することは証明されている⁹⁾。はたして、リーマン予想は正しいのであろうか。ここでは正しいという仮定のもと、その認識論的解釈を推し進めてゆきたい。

自明な零点と本質的な零点を数学的表現で比べると、そこにある対称性を見出すことができる。

自明な零点 $-2n + 0i$ 本質的な零点 $1/2 + ri$ (r は実数)

自明な零点は、実部が -2 の 0 を除く自然数倍（すなわち負の偶数）で変化し、虚部が 0 で固定されている。他方、本質的な零点は、実部が $1/2$ で固定し、虚部が変化する。その変化に何らかのパターンがあるや否やは今のところ分からないが（物理学でのカシミール元との関連を見る説もある）、虚数軸の正と負でその配置に対称性が見られる（複素共役の関係という）。それに対して自明な零点では、 1 以上の実数の正の部分では零点は存在しない。両者を実部で見ると、前者は負、後者は正、前者は 2 、後者はその逆数 $1/2$ という対称性が指摘できる。これらは図11で、両者が互いに 90 度回転の直角軸の関係にあることから多少うかがえるが、問題は、なぜ自然な原点 0 を中心とした回転でなく、それが実数軸で $1/2$ ずれているのか、ということだ。これには、ゼータ関数の変数 s と $1-s$ が同値になるという関数等式（ s と $0-s$ の絶対値が同じというのが原点 0 を折り目とした対称性だ）など、状況証拠はいくつかあるのだが、最終的な証明にはいたっていないというのが、リーマン予想のいまだ予想たるゆえんである。その解決は数学最大の難問ともいわれている。

ここでは、もちろん数学的証明とは縁もゆかりもない、リーマン予想の認識論的解釈を述べて、話のしめくりとしよう。やはり2視点、2円という見方が認識論的には有効である。図7を見ていただくと、原点 0 とは、互いに逆回転する2円の動径が垂直に対峙した地点ということになる。矛盾した表現になるが、これが静止像であれば、原点 0 は逆向き運動が相殺しあった純粋な原点 0 となろう。しかし、2円は回転し水平方向の運動をまさに生みつつあるのである。以下がその図である。

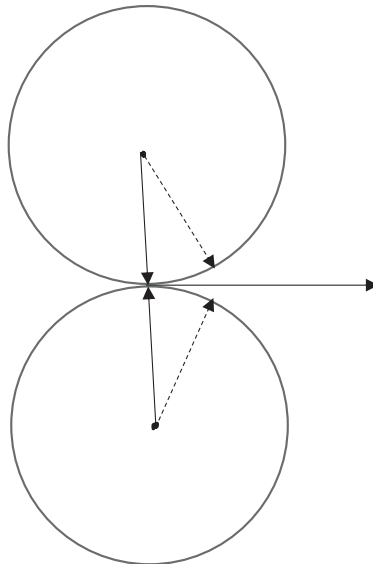


図12

これを90度で直交する2円のずれで表すと、次のようになる。2円を図7の要領で重ねているので、動径にあたる斜線は極である i 、 $-i$ から出ている。

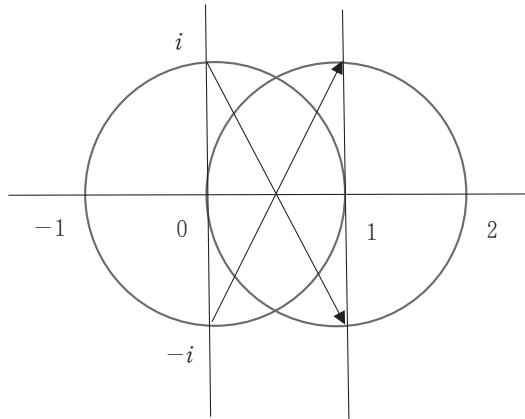


図13

i 、 $-i$ 両者からの視線は、静止像原点0から1/2ずれ垂直に対峙するというわけだ。そのことが、いわば「幅をもった」折り目を自明な零点と本質的零点の間に形成する。これは、従来の1視点静的数学観ではなく、認識論的観点からの2視点動的数学観によって初めて見えてくるものであろう。ゼータ関数の零点、リーマン予想をめぐって2という数がやたら関係してくるのも、こうした背景を示唆しているように思えてくる。さらに補足すれば、零点が虚数軸にそって対称的に分布しているのは、 i 、 $-i$ 両他者の視線が対等であることを意味し、それに対して、実数軸上の零点は負の偶数のみというように非対称であるのは、両視線がベキ円を互いに逆方向から掃いてきて、実数の負の領域で原点0に収束してゆき（地から絵の発生）、正の領域でそこから発散してゆく（絵の発展増殖）からである。実数線における正と負は、認識論的には絵と地というふうにならざるを得ない。

以上は、あくまで認識論の立場から複素平面に何が読み取れるかという哲学分野の話であって、リーマン予想をめぐる本来の数学的展開については、その推移を今後とも興味深く見守ってゆきたいと思う¹⁰⁾。

結 語

筆者はかねてより、数学は宇宙の客観的真理ではなく、人間が生み出したその尺度、捉え方であるとの意見を主張してきた。本論もその趣旨にそったものだが、前稿でも予告したように、そこからさらに、数学は具体的な特定の指示対象をもたない最も抽象的な言語であるがゆえに、人間というモノそのものの存在状態（内的認識状態）のカタチを体現しているのではないか、という仮説から、試みにその実践的解釈を提示したわけである。これがどこまで正しいかは、今後の展開、成果によるだろうが、筆者には、とにかく揺るぎない一つの信念のごときものがある。それは内なる他者の存在である。神という絶対者に支えられたデカルト的自己を中心とした1視点的世界観ではどうしても掬いき

れないものが、この世界にはある（思えば、神も究極の他者である）。それは西洋近代科学の限界でもある。この閉塞状況を打破するには、2視点他者的世界観が有効と思われるが、もとより「2」も「他者」も認識による世界像が成立してからの名称である。根源には、冒頭にも示したとおり、「あちら」と「こちら」とでも呼ぶしかない認識の、そして存在の基盤がある。この存在の意識は必然的に局所的なものとなり、「自己」という映像を両点間に結ぶ。以後、地は背景に退き、もっぱらこの絵を中心とした世界像が前面に展開されるわけだが、この地を掬いあげる方法としては、やはり言語をおいてほかにはあるまい。少なくとも、学問に携わる者にとってはそうである。そして、この地はあくまで即物的な、人間というモノそのもの＝存在のことである。科学言説の外的説明手法の限界が見えてきた今、この存在そのものの言語表現が求められているのである。数学、物理学における抽象概念の認識論によるモノ化をさらに推し進めてゆく動機がここにある。

註

- 1) 鈴木啓司2017,「新たなる認識論理の構築14—集合論を超えて 境界についての認識論的考察—」,名古屋学院大学論集(人文・自然科学篇) Vol. 53 No. 2. pp. 33-50.
- 2) G. レイコフ, R. ヌーニェス2012,『数学の認知科学』,植野義明,重光由加訳,丸善出版。
- 3) 余談になるが、犬猫というのは案外後ろがスキだけである。警戒心の強い猫など、前からの接近をなかなか許してくれないが、後ろからだと案外と近付ける。彼らにとってはもっぱら前から来る情報が世界のすべてであり、後方という意識はうすいのではないか。それは自己意識の濃淡に比例しているように、筆者には思える。また、想像力の有無にも関係しているであろう。自己像(直截な自己意識ではない)とは結局、想像力の産物といってよいからである。ちなみに、動物の内部状態そのものを描こうとした生物学者に、ヤーコプ・ユクスキュルがいる。彼はそれを「環世界」と呼び、外的な生物学的説明ではなく、内的な認識論の視座をこの分野にもち込んだのであった。その彼の著作にあって、「人間の座標系」と銘打たれた図が筆者の印象に残っている。それは人間の頭部を囲んで、上下、左右、前後の六つの半空間に分かたれた環世界である。彼の主張は、こうした座標系は多くの動物にそれぞれ備わっているというものだが、この図にあるような整然とした幾何学的それは、やはり人間特有のものであるように筆者には思える。ヤーコプ・フォン・ユクスキュル2012,『生命の劇場』,入江重吉,寺井俊正訳,講談社学術文庫, p. 173.
- 4) 鈴木啓司2016,「新たなる認識論理の構築13—主観の2視点3次元モデル—」,名古屋学院大学論集(人文・自然科学篇) Vol. 52 No. 2 pp. 23-36. 鈴木啓司2017, 上掲書。
- 5) 一つ e の発見にまつわる話を披露しておく、 e は式 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ に含まれる n が無限大になったときの収束値である。これはいわゆる複利計算の式で、前の期間(1/n)に生じた利息を元金に組み入れて(利息に利息を付けて)計算する方法だ。最初の預金額1に対し、 n に1を代入して計算すれば、答えは2となり、すなわち預金額は2倍となる。2を代入すると、2.25で1の場合より増える。3だと、2.37でさらに増える。この調子でゆくと、たとえば1年を無限に細分して利息の出る期間を短くしてゆけば無限の預金額を得られるのではないか、と思うが、そうはゆかない。その金額は $e = 2.718281\dots$ に収束するというわけである。筆者が思うに、ここには、足し算と掛け算の認識論的関係がほの見えているような気がする。1は無限乗しても1である。それは原初の不変量としての存在1を表す。これを増やす方策として(「増やす」というのは、その意識をもつこと、すなわち認識すること), 1を無限に分割して(足して1になる足し算のもとを作って)、それを1に加えて無限乗する方法が想像される。これが上式である。しかし、それは決して無限大に発散するのではなく、 $e = 2.718281\dots$ に

収束するのである。ここに、足し算を包み込みそれを支えている掛け算の姿を見る思いがする。原初存在1に対し、 e はそれを認識することの広がりを表しているといえる。

- 6) 論理学の大家ヤーコ・ヒンティッカが打ち出した論理。その問答形式から、問答を通して相手に無知を悟らせた弁証法の哲学者ソクラテスになぞらえ、ソクラテスの認識論ともいう。従来の認識論が獲得された知識の審査を主眼としていたのに対し、知識を情報として捉え、それがどのように獲得されるのかを研究対象とする認識論。その獲得方法が問答というわけだ。認識の成立には他者の存在が不可欠だということを示唆した論理であるといえる。Jaakko Hintikka, *Socratic Epistemology – Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning*, Cambridge 2007
- 7) 付け加えると、この2視点の交叉を空間的に表したのが行列であるといえる。行列は空間内のベクトル(方向と長さ)の変換などに登場するが、それはまさに行と列が90度で直交した形をしており、空間が何次元であっても、背景には2視点の直交交叉があることを思わせる。たとえば、「 n 次実対称行列は実固有値をもち、その固有ベクトルは互いに直交するように取れる」(宮岡礼子2017、『曲がった空間の幾何学』, 講談社ブルーバックス, p. 204)といった事実などに、それがうかがえる。
- 8) 数式で表せば、次のようになる。
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^p}}$$
- 9) 臨界線上に零点が無数個あることは、ハーディが1914年に証明した(のちの研究で、リーマン自身がすでにこの事実にいたっていたということが判明した)。いうまでもなく、これはリーマン予想の証明にはなっていない。無限個あることと、例外なくあることは、もちろん違うからである。
- 10) リーマン予想について最近の動向を見ると、黒川信重氏の絶対数学からのアプローチが興味深い。これは1元体という、演算 $1 \times 1 = 1$ だけからなる極めてシンプルな(数学的)実体を基本とする数学である。それは、従来の数学における点が究極的に無に収斂するのにに対し、「広がりをもった点」といえる。その思想の全容はもちろん筆者の完全に理解するところでは到底ないが、要は、リーマン予想を数学の根底的部分から捉え直そうという試みである。1元体というのは、何か(1)のベキ乗場を思わせるところがあって、個人的に関心を呼ぶものがある。ただ、認識論的観点からいえば、原初存在は大なる1としても、それを認識する掛け算 1×1 の導入には2視点が必要なのである。黒川信重2016、『絶対数学原論』, 現代数学社, 黒川信重2017、『絶対数学の世界』, 青土社, その他を参照。

参考文献

- 笠原乾吉 2016、『複素解析 1変数解析関数』, ちくま学芸文庫。
- 山本直樹 2015、『複素関数論の基礎』, 裳華房。
- 原岡喜重 2013、『オイラーの公式がわかる』, 講談社ブルーバックス。
- 中村亨 2015、『リーマン予想とはなにか』, 講談社ブルーバックス。
- Newton 2017年10月号「世界一美しい数式」, ニュートンプレス。
- 別冊Newton 2015、『こんなに便利な指数・対数・ベクトル』, ニュートンプレス。
- 数学セミナー増刊 2009、『リーマン予想がわかる』, 黒川信重編著, 日本評論社。