名古屋学院大学論集　社会科学篇　第52巻　第3号　pp. 59–74

〔論文〕

アンケートデータに基づく線形モデルの構築法

――基本統計量と一対比較行列を用いて――

程　　　　鵬

名古屋学院大学商学部

要　　旨

多変量解析や機械学習の研究分野では，事柄の評価，状況の予測，モノの識別などの問題が線形モデル：$\sum_{k=1}^{n} w_k x_k + w_0$として定式化され，既知のデータに基づいて線形モデルの係数w_1, w_2, …, w_n（以下，重みという）と切片w_0を求める解法が研究されている。一方，数理的な意思決定手法AHPの研究分野において既知のデータからなる一対比較行列に基づいて評価項目の重要度の重みを求める解法も数多く開発されている。本稿では，アンケートデータの基本統計量に基づいて一対比較行列を決定するための新しい手法，および，AHPの解法で一対比較行列によって求めた重みw_1, w_2, …, w_nを使って線形モデルの構築手法を提案する。なお，構築した線形モデルの使い方，および，その有効性における検証法についても議論する。

キーワード：データマイニング，線形モデル，重み計算，一対比較行列，AHP

A Method for Building a Linear Model by Employing Pairwise Comparison Matrices and Fundamental Statistics Based on Questionnaire Data

Peng CHENG

Faculty of Commerce
Nagoya Gakuin University

Abstract

In multivariate analysis or machine learning, one of the well-known problems is how to build a linear model $\sum_{k=1}^{n} w_k x_k + w_0$ based on the known data for resolving issues such as prediction, identification, and so on. In this paper, it is considered how to compute the coefficients w_1, w_2, $\cdots$, w_n (called weights) and w_0 (called intercept) based on the questionnaire data for evaluating importance between pairs of variables. Specifically, the new methods are respectively proposed for deciding a pairwise comparison matrix based on fundamental statistics of questionnaire data, and for building a linear model using the weights to be obtained by applying the known technologies of computing weights based on the pairwise comparison matrix in Analytic Hierarchy Process (AHP). Moreover, the validity and the practical application in the proposed method are also discussed.

Keywords: Data mining, linear model, computing weights, pairwise comparison matrix, AHP

発行日　2016年1月31日

1. まえがき

モノのインターネット（Internet of Things IoT）時代と言われるように社会の情報化がさらに一段と進んでいる。このような超高度化情報社会では，ビックデータ（Big Data）と呼ばれる様々な情報がインターネット上で爆発的に発生している。一方，コンピュータの性能向上に伴い，蓄積されているビッグデータを利用することが可能になるから，もしビッグデータを活かす技術があれば状況の判断予測や意思決定などがより的確かつ迅速に実現できると思われる。近年，ビジネス，政治，経済，医療，自然科学など様々な分野ではビッグデータの有効活用への期待が高まっている。今やデータマイニング（Data Mining）という象徴的な言葉のようにデータの学習における技術の研究開発には大変な注目が集まっている[1]。

これまでに「データマイニング」技術の中核をなす「データ学習」技術の研究開発が盛んに行っている。機械学習（Machine Learning）がその代表的な研究分野の一つである[9, 15]。「機械学習」研究分野では既知データ（すなわち知識）の学習によって数理モデルを構築するための技術開発が行われている。その中に中心的な役割を果たしている数理モデルの一つは線形モデル：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} w_k x_k + w_0$ である。たとえば事柄の予測とかモノの判別などの問題がこの線形モデルとして定式化できる。線形モデルの構築とは多変量（変数）$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の係数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$（以下，重み（weight）という）と切片 w_0 を求めることである。これまでにいろいろなモデル構築の技法が開発されているが，これらの技法は主に統計学と組合せ最適化理論をベースにして構築されているものである[9, 15, 35–37, 40, 43]。

一方，ある目的を達成するには幾つかの実現可能な代替案が提示されたとき，「どれを使ったらよいか，または，選ぶべき優先順位は何か」という種類の意思決定（Decision Making）はビジネス実務や政策決定などに要求される。この意思決定問題を解決するためにAHP（Analytic Hierarchy Process　階層分析法）は1970年代にピッツバーグ大学のThomas L. Saaty教授に提唱された[22, 23, 25, 45]。AHPは，評価基準の各項目間の一対比較によってペア間の重要度の重みを数量化したうえで各項目の重要度における重みを算出する方法である。AHPの基本的な考えの根幹は，項目間の重要度の評価が推移律を満たす点に着目し，もし求めた重み（すなわち項目の重要度の評価結果）が妥当性をもてば，その首尾一貫性（すべての項目間の推移律）を満たすはずという事実を使うところにある。つまり，これにより求めた重みの信頼性の評価が可能になる。これまでにAHPに関する研究成果が数多く報告されている。今や様々な意思決定の際にしてAHPが使われている[25, 27, 32, 39, 46]。

本稿では，既知のデータに基づく線形モデルを構築するための新たな手法を提案する。基本的な考え方は数多くの人間の知識・感覚（たとえばアンケート調査などによって得る）を活かして事柄を測るための線形モデルを作るのである。具体的にいうと線形モデルの複数の説明変数にお

1）日本では，最近，「機械学習」研究分野の解説書「機械学習プロフェッショナルシリーズ」[35–37, 40, 41, 43]や「ビッグデータ分析の最新技術動向」の解説書[48]などが数多く出版されている。

いてそれらのペア比較の重要度のデータをアンケート調査などによって集める。そしてアンケートデータの基本統計量（すなわち意思決定集団の知識・感覚）に基づく一対比較行列を決める。さらにこのように決められた一対比較行列を用いてAHPの解法によって各説明項目の重要度の重みを求める。最終的に求めた各説明項目の重みを使って線形モデルを構築する。また，本提案手法の使い方や有効性における検証法も論じる。

本稿の残りは次のように構成される。2. では，「機械学習」研究分野における重み計算問題およびその解法の基本的な考え方を解説する。3. では，AHPにおける重み計算問題の解き方を解説する。とりわけ一対比較行列の基本性質について述べる。4. では，アンケートデータの基本統計量に基づく一対比較行列の決定法を提案する。5. では，AHPの解法を用いて提案した一対比較行列によって求めた説明項目の重要度の重みを使って線形モデルの構築法について述べる。最後に6. では，提案手法の考え方の要点をまとめるとともに今後の研究課題などについて述べる。

2. 線形モデルにおける重み計算問題とその解法

何らかの事柄を評価（または測定）するとき，あらかじめ決められた評価項目（以下，評価基準とか，説明変数ともいう）に基づいて行うのは一般的である。たとえば，「品揃え」，「立地条件」，「店舗の広さ」，「サービスの充実度」，「広告の充実度」という5つの評価項目によって実店舗の売上高の評価分析を行うことが考えられる。このように事柄を評価する問題は，n個の説明変数$x_1, \cdots, x_n$からなる式(1)のような目的関数$f(x_1, \cdots, x_n)$として定式化できる。ここで，w_0を切片といい，$x_0 = 1$と固定する。式(1)の数理モデルを線形モデル（linear model）[9, 44]と呼ぶ。

$$f(x_1, \cdots, x_n) = w_0 x_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = \sum_{k=0}^{n} w_k x_k \tag{1}$$

この売上高の評価分析例では，「品揃え」，「立地条件」，「店舗の広さ」，「サービスの充実度」，「広告の充実度」をそれぞれ説明変数x_1, x_2, x_3, x_4, x_5に対応すると目的関数$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$は売上高を表す。明らかに説明変数$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$の係数$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$と切片$w_0$の値が決まれば具体的な目的関数$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$が決まる。その結果，この目的関数を用いて売上高の要因分析とか予測を行うことができる。

本稿では，数値$d_1, d_2, \cdots, d_n$（以下，1組のデータともいう）をそれぞれ説明変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$に与えたことを簡単に$\langle d_1, d_2, \cdots, d_n \rangle$と記す。$r$組のデータ$\langle d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \cdots, d_n^{(1)} \rangle, \cdots, \langle d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, \cdots, d_n^{(r)} \rangle$を与えたとき，式(1)の説明変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$の係数$w_1, w_2, \cdots, w_n$（以下，重み（weight）という）を求める問題を線形モデルにおける**重み計算問題**（computing weight problem）という。

この重み計算問題がいろいろな分野に現れる。たとえば，ビジネス分野では上述の売上高の評価分析を行うには既知のデータにおける多変量解析（たとえば，重回帰分析[9, 44, 47]）の際にこのような重み計算問題の解決が要求される。とりわけ，顧客セグメント分析，株式取引動向予測，医療診断，DNA配列の分類，パターン認識など幅広い分野への応用をもつ「機械学習」研究分野にもこのような重み計算問題が取り扱われている[9, 15, 35–37, 40, 43]。

一般的には「機械学習」研究分野が重回帰分析を研究対象として含む。以下では，重回帰分析問題の解き方を用いて「機械学習」研究分野における重み計算問題を解く基本的な考え方を述べる。重回帰分析の解き方は次の2つの部分からなる。

1）アンケート調査などによってr組のデータからなるデータ群：

$$\{\hat{f}_1, \langle d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \cdots, d_n^{(1)} \rangle\}, \{\hat{f}_2, \langle d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \cdots, d_n^{(2)} \rangle\}, \cdots, \{\hat{f}_r, \langle d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, \cdots, d_n^{(r)} \rangle\} \tag{2}$$

が用意する。ここで，$k=1, 2, \cdots, r$に対し，$\hat{f}_k$は値 $\langle d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)} \rangle$ を説明変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$に与えたときの目的関数の観測値である。

2）用意したデータ群を使って何らかの基準（すなわち制約条件）を満たすよう, 何らかの手法（たとえば，最適化手法[2]）によって式(1)の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$と切片w_0を求める。代表的な手法の一つとして最小2乗法（Least Squares Method LSM）が挙げられる[9, 47]。LSMによる重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$の求め方は次のようである。1組のデータ $\langle d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)} \rangle$ を説明変数$x_1, x_2, \cdots, x_n$に与え, 式(1)を用いてその目的関数の値$f(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)})$は式(3)のように算出される。

$$f(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)}) = w_0 + w_1 d_1^{(k)} + w_2 d_2^{(k)} + \cdots + w_n d_n^{(k)} \tag{3}$$

それぞれの測定値$\hat{f}_k$と目的関数値$f(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)})$の差の自乗$(\hat{f}_k - f(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)}))^2$の合計が最小になるよう重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$と切片$w_0$を決定する。つまり, $w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n$(変数として考える）にそれぞれの数値を設定すると差の自乗の合計（式(4)の合計部分）が算出される。このようにいろいろな値を変数$w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n$に入れ，そのうちその合計が一番小さくなったときの$w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n$(すなわち数値）を解として決定する。よって, LSMが式(4)の最適化問題として定式される。ここで，$\mathcal{R}$は実数の集合を表す。

$$\min_{w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{r} \left(\hat{f}_k - f\left(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)} \right) \right)^2 \tag{4}$$

LSMに示すように「機械学習」研究分野における重み計算問題は一種の組合せ最適化問題として取り扱われる。これまでに知られている解法が主に統計学[9, 41]，組合せ論[2]などの数理的な手法をベースにして構築されている[9, 15]。なお, これらの解き方は基本的に近似的な解法である。

次節では，意思決定問題を解決する際によく用いられるAHP（階層分析法）におけるもう一つの重み計算問題とその解き方を説明する。

3. AHPにおける重み計算問題とその解法

「ある目標（goal）を達成するためのいくつかの代替案（alternative）（すなわち問題解決案）が与えられたとき，それらを選択すべき優先順位を決定せよ」というタイプの意思決定問題が実社会によく現れる。このような意思決定問題を解決するためのAHP手法についてはこれまでにその実

用性や拡張などに関して様々な研究が行われている[2)]。近年，その有効性が広く認識されつつあるため，意志決定や公共事業の合意形成など様々な分野に幅広く利用されている［25, 27, 32, 38, 39, 46］。以下では，AHPの基本的な考え方を述べる。

3.1　AHPの基本手順

AHPの基本手順（基本的な考え方）は，①階層構造の構築，②一対比較行列の決定，③重みの計算，④総合重みの計算（すなわち，代替案の優先順位の決定）から構成される。

①階層構造の構築　問題を分析して評価基準（criterion）の抽出と階層図を作成する。階層構造の構築では，意思決定の構成要素を「目標)」,「評価基準」,「代替案」の3階層[3)] に分ける（図1)。評価基準とは，代替案を評価する際の基準となるものである。たとえば，売上高を評価するには「品揃え」，「立地条件」，「店舗の広さ」，「サービスの充実度」，「広告の充実度」という5つの説明項目が評価基準として挙げられる。

②一対比較行列の決定　一対比較とは，目標の評価において評価基準のペアに対して「どちらの評価基準が重要か」を決定することである。すべての一対比較[4)]の結果(以下，比較データという）から構成される行列は一対比較行（comparison matrix）と呼ばれる。同様に各評価基準において代替案のすべてのペアに対して「どちらの代替案が重要か」の比較を行うことによりそれぞれの一対比較行列が得られる。つまり，一対比較行列はデータ集合の表現方式の一つである。

実際の比較データの決定には，9点法がよく用いられている（図2)。とりわけ，一対比較行列（すなわち，意思決定用データ）を確定すると最終的な意思決定結果がほぼ決まる。この意味でAHPにおいては一対比較行列の決定が最も重要な作業のひとつである。本稿では，アンケートデータ（すなわち，集団的な意思決定データ）の基本統計量に基づく一対比較行列の新たな決定法が節4に提案される。

このように人間の共通する感覚を数量化し，数理的な手法をその数量化したデータに適用して

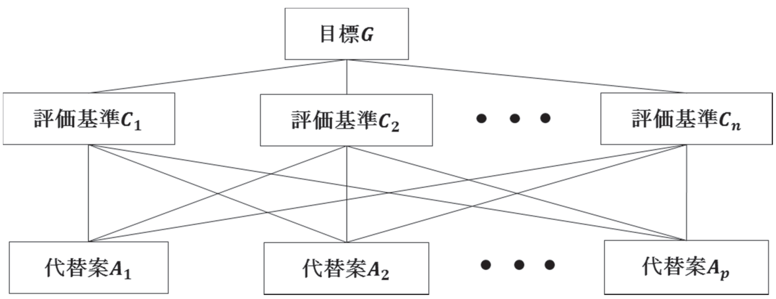

図1　意思決定の階層構造

2）AHP階層構造をネットワーク構造に拡張したANP（Analytic Network Process）などが提案されている［27, 28, 42］。また支配型AHP，記述的（descriptive)-AHPなど数多くの手法が考案されている［39］。

3）必要なら「評価」階層をさらに詳しく分解して階層化してもよい。

4）r項の評価基準からなるすべてのペア数は$r(r-1)/2$である。

Intensity of Importance	*Definition*	*Explanation*
1	Equal Importance	Two activities contribute equally to the objective
2	Weak or slight	
3	Moderate importance	Experience and judgment slightly favor one activity over another
4	Moderate plus	
5	Strong importance	Experience and judgment strongly favor one activity over another
6	Strong plus	
7	Very strong or demonstrated importance	An activity is favored very strongly over another; its dominance demonstrated in practice
8	Very,very strong	
9	Extreme importance	The evidence favoring one activity over another is of the highest possible order of affirmation
1.1–1.9	When activities are very close a decimal is added to 1 to show their difference as appropriate	A better alternative way to assigning the small decimals is to compare two close activities with other widely contrasting ones, favoring the larger one a little over the smaller one when using the 1–9 values.
Reciprocals of above	If activity *i* has one of the above nonzero numbers assigned to it when compared with activity *j*, then *j* has the reciprocal value when compared with *i*	A logical assumption
Measurements from ratio scales		When it is desired to use such numbers in physical applications. Alternatively, often one estimates the ratios of such magnitudes by using judgment

図2　比較による項目間の重要度を数量化する基準[28]

最終的な意思決定を行うのはAHPの特徴である。それゆえにAHPは人間の主観的判断と数理的なアプローチとの両面からミックスした意思決定法といえる。

③重みの計算　一対比較行列を用いて評価基準の重みを求める。この作業は最も重要な作業である。重みの計算法に関する研究結果が数多く報告されている[1, 3–8, 10–14, 16–34]。その代表的な解法は一対比較行列の最大固有値の固有ベクトルを重みとして求める方法である[23, 26]。

また，求めた重みにおける整合性の検証は，式(5)によって定義された**整合度（Consistency Index *CI*）**を用いて行える。ここで，n と λ_{max} は一対比較行列の次元と最大固有値を表す。一般的には整合度CIの値が0.10以下であればその重みの整合性があると認められる。逆に整合度CIの値が0.15以上ならばその整合性があるとは思われない。つまり，一対比較行列，すなわち比較データの間に矛盾が存在していると判断される。この場合，一対比較行列の修正を行う必要がある。その修正法に関する研究報告が知られている[20, 21, 31]。

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{5}$$

一方，実際にAHPを利用して意思決定問題を解決するとき，一人の意思決定者のみならず，意思決定集団による一対比較行列の要素（すなわちデータ）を決定する場合がよくある。この場

合，アンケート調査によって得たデータ（集団的な意思決定データ）がよく用いられる。しかし，情報不足や価値観の相違などによって異なった判断を下す可能性もある。つまり，あるペア比較のデータを完全に決定できない場合がある。このようにすべてのペア比較のデータが得られない一対比較行列を不完全な一対比較行列（incomplete comparison matrix）と呼び，不完全な一対比較行列における重みの計算法に関する研究が知られている[7, 11, 18, 29, 30, 33]。このように様々な状況に対応する解法が開発されたことによりAHPは実践的方法として使えるようなものになる。

④総合重みの計算　これまでに求めた各階層の重みを用いて最終的に代替案の重みを算出する[23]。

3.2　一対比較行の基本性質

この小節では，一対比較行列の意味を解釈したうえ，その基本性質を解説する。事柄の評価に使うn項の評価基準を$C_1, C_2, \cdots, C_n$とする。また，評価基準$C_1, C_2, \cdots, C_n$の重要度の重みをそれぞれ$w_1, w_2, \cdots, w_n$とする。そして評価基準ペア〈C_i, C_j〉に対し，「評価基準C_iが評価基準C_jよりどのくらい重要か」を表す比較データ[5)]をa_{ij}と記すと，式(6)によってこの重要度の比較結果を数量化するのは自然である。また，逆に評価基準ペア〈C_j, C_i〉の比較データa_{ji}が$\dfrac{w_j}{w_i}$となるのも合理的である[6)]。

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j},\ \ i = 1, \cdots, n,\ \ j = 1, \cdots, n \tag{6}$$

このように評価基準のすべて（すなわち，$n(n-1)/2$個）の一対比較データからなる式(7)の行列Aが一対比較行列である。また，この一対比較行列Aは$a_{ij} \times a_{ji} = 1 (i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, n)$を満たすため，**逆数行列**（reciprocal matrix）とも呼ばれる[10, 19, 23, 29, 31]。

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \ where\ a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}\ and\ a_{ii} = 1 \tag{7}$$

最も知られている基本的性質の一つは，「一対比較行列Aの最大固有値λ_{max}がnより大きい」ことである。この性質より整合度$CI \geq 0$。この性質の妥当性が次のように示される。まず，重みベクトルを$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$と記すと行列の固有ベクトルの定義より次の式(8)が成り立つ。

$$Aw = \lambda_{max} w \tag{8}$$

さらに一対比較行列Aの定義により$a_{ij} \times a_{ji} = 1 (i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n)$，$a_{ii}\dfrac{w_i}{w_i} = 1$，$a_{ji}\dfrac{w_i}{w_j}$と$a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i}$が逆数関係なので「$a_{ji}\dfrac{w_i}{w_j} + a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i} \geq 2$」を用いると次の式(9)が得られる。式(9)から「$\lambda_{max} \geq n$」が成

5）図2に示している数量化の基準値（すなわち，1, 3, 5, 7, 9, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9）が目安基準として設けられている。

6）具体的に説明すると，たとえば，評価基準C_jより評価基準C_iのほうがかなり重要（すなわち，「**7**」と数量化する）であると決定すれば，$a_{ij} = 7/1 = 7$となる。明らかに，評価基準C_iより評価基準C_jのほうが重要ではない（すなわち，「1/7」）と数量化する）といえる。つまり，$a_{ji} = 1/7$となる。

り立つといえる。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{max} w_i \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad \rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \lambda_{max} \qquad \rightarrow \qquad n\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}\right) = n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j} + a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right) \geq n + \frac{n(n-1)}{2}2 = n^2 \tag{9}$$

とりわけ，すべての$i, j=1,\cdots,n$に対し，$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$を満たすとき，式(10)に示すように $\lambda_{max}=n$となり，式(5)より$CI=0$。このとき，一対比較行列Aが**完全に整合性**（consistency）をもつという。つまり，一対比較行列Aに矛盾が存在しないことを意味する。

$$n\lambda_{max} = n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j} + a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right) = n^2 \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{max} = n \tag{10}$$

しかし，実際に得られた一対比較行列には完全に整合性をもつものが少ない。そこで，できだけ整合性をもつような（すなわち，CIの値を小さくする）重みの解法に関して様々な研究が行われている［6, 8, 13, 14, 19, 31, 33, 34］。また，明らかに式(10)の項$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j} + a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)$は重みの精度に影響を与える本質的な部分であり，AHPの重み計算問題に関する主な研究はこの部分の最小化に工夫するところにある。

4. アンケートデータの基本統計量に基づく一対比較行列の決定法

この節では，ある事柄を評価するにはn項の評価項目$C_1, C_2, \cdots, C_n$を用いるとする。各ペア$\langle C_i, C_j \rangle$について重要度の比較に関する図3のようなアンケート調査をm人に対して実施する。1人分のアンケートデータから1つの一対比較行列が得られる。m人分のアンケートデータに対応するm個の一対比較行列を$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)}), A^{(2)}=(a_{ij}^{(2)}), \cdots, A^{(m)}=(a_{ij}^{(m)})$とする。

以下では，m個の一対比較行列$A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(m)}$に基づいて1つの一対比較行列$A$を決定する問題，すなわち，それぞれの要素$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)}$（すなわちデータ系列）に基づいて一対比較行列$A$の要素$a_{ij}$を求める問題を考える。

これまでにこのように集団的な意思決定データ（たとえばアンケートデータ）による一対比較行列の決定法における研究報告が知られている[1, 16, 17, 38]。たとえば，データ系列$a_{ij}^{(1)}$，$a_{ij}^{(2)}, \cdots,$ $a_{ij}^{(m)}$の幾何平均値を要素a_{ij}の値として決める方法が提案されている。つまり，$a_{ij}=\prod_{k=1}^{m} a_{ij}^{(k)}$。しかし，このような決め方によって得た一対比較行列の妥当性に関して不安の要素が一般的には排除できない。なぜなら，そもそも信頼性が欠けたデータが既知のデータ集合に含まれる可能性があるか

＜設問＞ 評価基準C_iとC_jを比較してどちらが重要か。〇でご答えください。										
	極めて重要	非常に重要	かなり重要	やや重要	同じ重要	やや重要	かなり重要	非常に重要	極めて重要	
評価基準C_i										評価基準C_j

図3 C_iが重要なら右側に，C_jが重要なら右側に〇を付けて回答するアンケート方式

らである。

そこで本稿では，アンケートデータ，いわば，集団的な意思決定データ（すなわち，データ系列$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(m)}$）の基本統計量（すなわちデータ分布の情報）を活かして一対比較行列の決定法を提案する。この決定法は次のStep 1，2から構成される。

Step 1：生データにおける前処理

まず，各一対比較行列$A^{(k)}(k=1, \cdots, m)$に対してその整合度$CI_A^{(k)}$を求める。そして次の条件(11)を満たさない一対比較行列$A^{(k)}$（すなわち，アンケートデータ）を不採用とする[7]。

$$CI_A^{(k)} < 0.15 \tag{11}$$

このステップの目的は，あらかじめ矛盾が潜んでいる**生データ**（すなわち，アンケートデータ）を排除することである。つまり，より信頼性をもつようなアンケートデータを使って一対比較行列Aを決める。

以下では，この処理によりm個の一対比較行列$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)}), A^{(2)}=(a_{ij}^{(2)}), \cdots, A^{(m)}=(a_{ij}^{(m)})$から条件(11)を満たさないものを削除した後，$s$個の一対比較行列を残したとする。簡単のためにこの$s$個の一対比較行列を$A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)}), A^{(2)}=(a_{ij}^{(2)}), \cdots, A^{(s)}=(a_{ij}^{(s)})$と記す。

Step 2：一対比較行列Aの決定

s個の一対比較行列の要素$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)}$（すなわち，データ系列）の基本統計量に基づいて一対比較行列Aの要素a_{ij}の値を次のように決定する。

まず，このデータ系列の基本統計量を求める[8]。以下では，算術平均値$average(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$Average_{ij}$と，最大値$max(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$Max_{ij}$と，最小値$min(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$Min_{ij}$と，標準偏差$stdv(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$stdv_{ij}$と，中央値$median(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$Median_{ij}$と，歪度$skew(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)})$を$Skew_{ij}$と記す。

本稿では意思決定参加者の多数意見にしたがって要素a_{ij}の値を決定するという基本的な考え方が採用される。具体的にいうと参加者らの意思（すなわち，データ系列$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)}$)のバラツキ（すなわち，標準偏差$stdv_{ij}$）に基づいて要素$a_{ij}$の値を決める手法である[9]。

次は，「標準偏差$stdv_{ij}$が大きいかどうか」の判定基準がどのように設定されたら適切か。これを明確に決める必要がある。本稿では，その判断基準が最大値Max_{ij}と最小値Min_{ij}の差の何割かによって設定される。具体的に一対比較行列Aの要素a_{ij}が次の3つのケース(a)～(c)に分けて決まる。

7） 整合度は$CI_A^{(k)} \geq 0.15$となるとそのアンケートデータに矛盾がある可能性は大きい。そのデータを採用しないほうは適切である。なお，最大固有値λ_{max}が求まれば，式(5)により$CI_A^{(k)}$が算出できる。よって，このステップが実現可能である。

8） 表計算ソフトExcelなどのツールを使って基本統計量が簡単に計算できる。

9） なぜなら，意思決定において，標準偏差$stdv_{ij}$が大きい場合，参加者らの意見が纏まらないと意味する。つまり，この場合は，要素a_{ij}の値が決定できないからである。

(a) $stdv_{ij} \leq 0.1 \times (Max_{ij} - Min_{ij})$を満たす場合[10)]

この場合，バラツキが意見の範囲の幅の1割以内であるため，平均値$Average_{ij}$は要素a_{ij}の値としてもよいと思われる（式(12)）。つまり，平均値を使うにはその信頼性があまり損なわないと考えられる[11)]。

$$a_{ij} = average(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)}) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} a_{ij}^{(k)} \quad (12)$$

(b) $0.1 \times (Max_{ij} - Min_{ij}) < stdv_{ij} \leq 0.3 \times (Max_{ij} - Min_{ij})$を満たす場合

この場合，データ系列$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)}$のバラツキが多少大きい。このため，さらに意見の分布（すなわち，データの度数分布）を調べてから決める必要がある。本稿では，中央値$Median_{ij}$[12)]と歪度$Skew_{ij}$[13)]の値を参考にして図4に示している4つのケース（Case 1～4）に分けて要素a_{ij}の値を決定する。

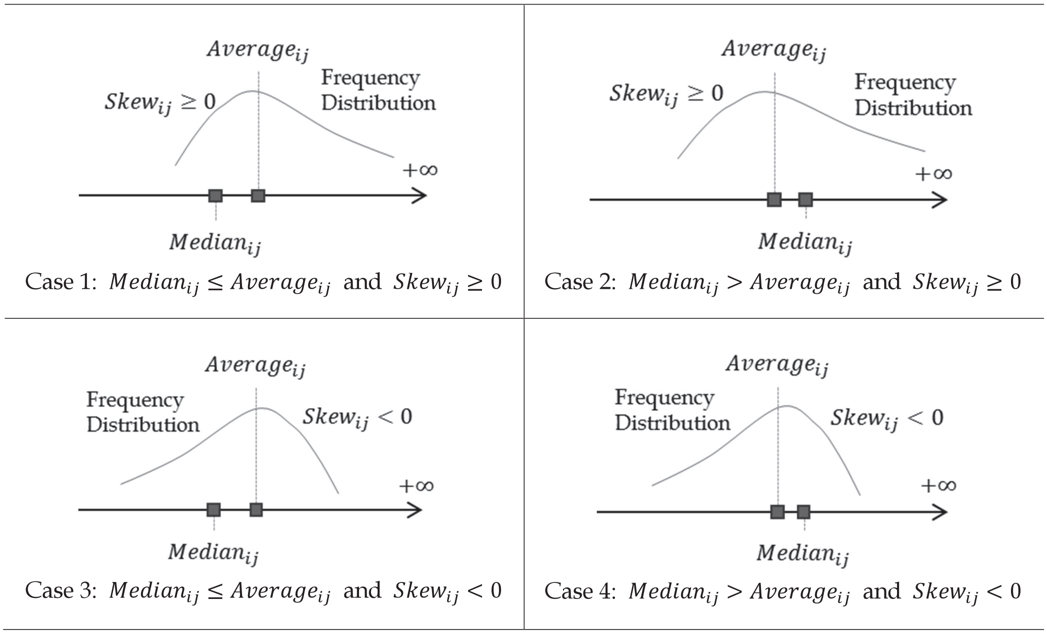

図4　平均値，中央値，歪度を用いた要素a_{ij}の決定ルール

Case 1, 2は歪度$Skew_{ij}$が正の場合である。この場合，基本的に左側のデータ（すなわち，数値の小さいほう）を使って要素a_{ij}の値を決定する。

Case 1は，平均以下のデータが半分以上である。平均以下のデータ集合をS_1とし，S_1の平均値$average_{S_1}$と標準偏差$stdv_{S_1}$の合計を要素a_{ij}の値とする（式(13)）。

10）比較データの範囲は1/9, 1/7, …, 1/3, 1, 3, …, 7, 9である。「0.1」はこの範囲の約一割の幅である。

11）「どちらかが重要か」を決定するので，データのバラツキが大きくなると意思決定集団のメンバーの意見が揃わないということになる。このため，平均値を使う意味はあまりないと思われる。

12）この中央値の定義よりこの中央値より小さいデータの個数はデータ全体の半分以上である。

13）平均値の左右にデータの分布状況を示す指標（たとえば［41］）。

$$S_1 = \{a_{ij}^{(q)} | a_{ij}^{(q)} \leq Average_{ij};\ q = 1, \cdots, s\}$$
$$a_{ij} = average_{S_1} + stdv_{S_1} \tag{13}$$

Case 2は，平均以下のデータが少ない（半分以下）である。このため，$Median_{ij}$以下のデータの集合をS_2とし，S_2の平均値$average_{S_2}$と標準偏差$stdv_{S_2}$の合計を要素a_{ij}の値とする（式(14)）。

$$S_2 = \{a_{ij}^{(q)} | a_{ij}^{(q)} \leq Median_{ij};\ q = 1, \cdots, s\}$$
$$a_{ij} = average_{S_2} + stdv_{S_2} \tag{14}$$

Case 3，4は歪度$Skew_{ij}$が負の場合である。この場合，右側のデータ（すなわち，数値の大きいほう）を使って要素a_{ij}の値を決定する。

Case 3は，平均以上のデータが半分以下である。このため，$Median_{ij}$以上のデータの集合をS_3とし，S_3の平均値$average_{S_3}$と標準偏差$stdv_{S_3}$の差を要素a_{ij}の値とする（式(15)）。

$$S_3 = \{a_{ij}^{(q)} | a_{ij}^{(q)} \geq Median_{ij};\ q = 1, \cdots, s\}$$
$$a_{ij} = average_{S_3} - stdv_{S_3} \tag{15}$$

Case 4は，平均以上のデータが半分以上である。平均以上のデータの集合をS_4とし，S_4の平均値$average_{S_4}$と標準偏差$stdv_{S_4}$の差を要素a_{ij}の値とする（式(16)参照）。

$$S_4 = \{a_{ij}^{(q)} | a_{ij}^{(q)} \geq Average_{ij};\ q = 1, \cdots, s\}$$
$$a_{ij} = average_{S_4} - stdv_{S_4} \tag{16}$$

なお，式(12)～(16)の計算は表計算ソフトExcelなど基本統計量の計算ツールで実現できる。

(c) $0.3 \times (Max_{ij} - Min_{ij}) < stdv_{ij}$を満たす場合

この場合,意思決定者らの意見はあまり纏まらないと考え,要素a_{ij}の値が決定できないとする。

以上，固定したi，jに対し，a_{ij}の値を決める方法を示した。明らかにこの方法は基本統計量やデータ分布を求める計算ツール（たとえば表計算ソフトExcel）を使って実現可能である。

同様に同じ方法ですべての$i = 1, \cdots, n$と$j = 1, \cdots, n$に対するa_{ij}の値が求まるが，実際にある要素a_{ij}の決定に使うデータ系列$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(s)}$が**ケース(c)**の条件を満たす可能性がある。つまり，アンケートデータによっては一対比較行列Aの数多くの要素の値が決まらないと考えられる[14)]。なお，この場合の対処法としては，ケース(b)の範囲の幅「0.3」を緩めることにより決まらない要素の数を減らす方法が考えられる。

いずれにしろ，Step 1，2によってはアンケートデータに基づいて一対比較行列A（不完全な一対比較行列になる可能性もある）を決定する。

5. 一対比較行列による線形モデルの構築法

この節では，まず一対比較行列によって評価項目$C_1, C_2, \cdots, C_n$の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$を求めるのは可能であることを説明する。そして求めた重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$を用いた線形モデル（すなわち目

14）具体的に一対比較行列の決まらない要素の数はどのくらいまで許すか。この答えは次の小節5.2で使おうとする不完全な一対比較行列の重みを求める解法によって違う。

的関数)の構築法と利用法を記述する。最後に提案手法の有効性における検証法について検討する。

5.1　一対比較行列に基づく評価項目の重みの決定法

節4で得た一対比較行列Aのすべての要素a_{ij}の値が決められるとは限らない。つまり，次の2つの場合を考える必要がある。それぞれの場合の解法があるのでそれを使って評価項目の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$を求めることが可能である。

◇一対比較行列Aが不完全な場合

この場合，文献[7, 11, 18, 30, 33] などの解法が知られている。特に[11]の解法は簡単でよく利用されている。

◇一対比較行列Aが完全な場合

この場合，文献[4, 12–14, 19, 22–25, 34]などの解法が知られている。特に[23]などに示している，べき乗による最大固有値の固有ベクトルを求める解法が簡単でよく利用されている。

また，上記の解法で求めた重みの整合度CIが0.15以上の場合，その一対比較行列を修正して再計算する必要がある。その整合度CIが0.10以下になるような重みの解法が開発されている[6, 8, 14, 33, 34]。そのどれかを使って整合性があるような評価項目の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$を求めることが可能である

なお，注意されたいのはこれらの解法によって求めた評価項目$C_1, C_2, \cdots, C_n$の重要度の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$の合計が1となるのである。つまり，$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$。

5.2　評価項目の重みによる線形モデルの構成法

評価項目$C_1, C_2, \cdots, C_n$の重み$w_1, w_2, \cdots, w_n$を用いて式(17)の線形モデルを作る。ここで，$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$であるため，各項目C_kがその平均が0，その標準偏差が1のような変数になるのは合理的である。

$$g(C_1, C_2, \cdots, C_n) = w_1 C_1 + w_2 C_2 + \cdots + w_n C_n = \sum_{k=1}^{n} w_k C_k \tag{17}$$

そこで，式(1)の各説明変数x_kを平均が0，標準偏差が1となるように正規化したものを項目C_kとして使う。データの正規化は次の式(18)によって行なえる[15]。ここで，$d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)}$は説明変数（評価項目）$x_k$の既知データ系列であり，$average(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})$はデータ系列$d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)}$の平均値を表し，$stdv(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})$はデータ系列$(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})$の標準偏差を表す。

$$C_k = \frac{x_k - average(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})}{stdv(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})} \tag{18}$$

15）データの正規化は平均値と標準偏差によって行われる。正規化したデータの平均が0，標準偏差が1になる。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ に入力した値に対し，式(18)によって $C_1, C_2, \cdots, C_n$ の値が求まる。そして式(17)に代入して $g(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ の値が求まる。

よって,次の式(19)によって線形モデルの目的関数 $h'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値が求められる。ここで, $average(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p)$ と $stdv(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p)$ はそれぞれ観測値 $\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p$（式(2)）の標準偏差と平均値を表す。

$$h'(x_1, \cdots, x_n) = average(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p) + g(C_1, C_2, \cdots, C_n) \times stdv(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p) \tag{19}$$

$k = 1, \cdots, r$ に対し，$h'(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)})$ と $\hat{f}_k$ の値を用いて式(20)の最適化問題を解くと切片 w_0 が求められる。

$$\min_{w_0 \in \mathcal{R}} \sum_{k=1}^{r} (\hat{f}_k - h'(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)}) - w_0)^2 \tag{20}$$

以上より，最終的な線形モデル $h(x_1, \cdots, x_n)$ が式(21)のように得られる。

$$\begin{aligned} h(x_1, \cdots, x_n) &= w_0 + average(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p) \\ &\quad + stdv(\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_p) \sum_{k=1}^{n} \left(w_k \frac{x_k - average(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})}{stdv(d_k^{(1)}, d_k^{(2)}, \cdots, d_k^{(s)})} \right) \end{aligned} \tag{21}$$

5.3 提案手法の有効性における検討

提案した線形モデル（すなわち式(21)）の構築法の有効性を検証する方法を考える。一番望ましいのは理論的にその有効性を示すことである。しかし，これは簡単に実現できないため，既知のデータを使った次の検証法が考えられる。

この基本的考えは，多変量解析のように線形モデルと既知データとの当てはめの具合を調べ,統計的な推定を行ってみることである。たとえば,その両者の差,すなわち,線形モデル(式(21))によって算出した $h(d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \cdots, d_n^{(k)})$ と $\hat{f}_k$ の差の自乗の合計を算出してみることである。

もしこの差の自乗の合計が小さいなら，精度がよいと言える。そうでなければ線形モデルを作るプロセスの各作業（節4と小節5.1, 5.2に示している解法の選択作業など）を再検討してみる。

6. まとめ

AHPは人間の意思決定の主観的（感覚的）な判断部分を数量化して評価項目の重要度の重みを求めることによって意思決定を導き出すための数理的な手法である。とりわけ，これまでに応用上の様々なニーズに応えるために一対比較行列による評価項目の重要度の解法が数多く開発されている。

本研究では，評価項目間の重要度の比較における推移律[16]を満たすという事実を利用しアンケートデータ（すなわち意思決定グループの知識と感覚）の基本統計量に基づく一対比較行列（すなわち項目ペアの重要度の評価データ）を決定するための新しい手法を提案した。また，これま

16）BよりAのほうが重要であり，CよりBのほうが重要であれば，CよりAのほうが重要である。重さ・長さなどの大小関係を比較するとき，この推移律はよく用いられる。

でに知られているAHPの解法の援用によって一対比較行列に基づいて求めた評価項目の重要度の重みを用いて線形モデルを構築する手法を提案した。とりわけ，本提案手法の基本的な考えは評価項目間の比較にもこのような推移律を満たす事実に注目し，提案した線形モデルの構築法に合理性をもつように狙うところにある。本提案の線形モデルの構築手法の特徴として次の点が挙げられる。

（1）一対比較行列の解法によって求めた評価項目（すなわち説明項目として考える）の重要度の重みを線形モデルの説明項目の重みとして使う。

（2）実際に与えられたアンケートデータ（すなわち生データ）に矛盾があるかチェックすることにより収集したデータ集合に含まれている不適切なデータを取り除く（節4のStep 1に参照）。これは一対比較行列の整合性のチェックによって行える。

（3）アンケートデータの基本統計量によって見つけ出した意思決定グループの多数意見を採用して一対比較行列を構成し，その一対比較行列によって説明項目の重みを決定する（節4のStep 2に参照）。

（4）応用上の様々なニーズに応じて一対比較行列によって説明項目の重みを求める解法を選ぶことが可能である（小節5.1に参照）。

（5）一般的には，本提案手法が基本統計量の計算ツールなどで実現できる。

なお，興味深いと思われる今後の課題として次のことが挙げられる。

（1）本提案手法の有効性を理論的に検証する。

（2）本提案手法を実社会問題の解決に利用することによりその有効性を実証する。

謝辞

長い間，教育研究にご助言いただいた名古屋学院大学商学部岸田賢次教授に感謝の意を表したい。また，本研究は2013年度名古屋学院大学研究奨励金による研究成果の一部である。

参考文献

［1］ J. Aguarón, M. T. Escobar, J. M. Moreno-Jiménez (2014),“The precise consistency consensus matrix in a local AHP-group decision making context”, Annals of Operations Research 18, pp. 1–15.

［2］ S. Boyd, L. Vandenberghe (2004), Convex Optimization, Cambridge University Press.

［3］ Y. Dong, X. Chen, C. C. Li, W. C. Hong, Y. F. Xu (2014),“A heuristic approach for deriving the priority vector in AHP”, Soft Computing 19, pp. 2321–2335.

［4］ G. B. Crawford (1987),“The geometric mean procedure for estimating the scale of a judgement matrix”, Mathematical Modelling 9, pp. 327–334.

［5］ M. T. Escobar, J. Aguaron, J. M. Moreno-Jimenez (2004),“A note on AHP group consistency for the row geometric mean prioritization procedure”, European Journal of Operational Research 153, pp. 318–322.

［6］ A. Farkas, A. György, P. Rózsa (2004),“On the spectrum of pairwise comparison matrices”, Linear

Algebra and its Applications 385, pp. 443–462.

[7] M. Fedrizzi, S. Giove (2007), "Incomplete pairwise comparison and consistency optimization", European Journal of Operational Research 183, pp. 303–313.

[8] W. Gaul, D. Gastes (2012), "A note on consistency improvements of AHP paired comparison data", Advances in Data Analysis and Classification 6, pp. 289–302.

[9] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman (2009), The Elements of Statistical Learning, Springer Science Business Media, LLC (Second Edition).

[10] P. T. Harker (1987), "Derivatives of the Perron root of a positive reciprocal matrix: With application to the analytic hierarchy process", Applied Mathematics and Computation 22, pp. 217–232.

[11] P. T. Harker (1987), "Incomplete pairwise comparisons in the Analytic Hierarchy Process", Mathematical Modeling 9, pp. 837–848.

[12] S. S. Hosseinian, H. Navidi, A. Hajfathaliha (2012), "A new linear programming method for weights generation and group decision making in the Analytic Hierarchy Process", Group Decision and Negotiation 21, pp. 233–254.

[13] F. Kong, H. Y. Liu (2005), "An Improvement on Saaty's AHP", Artificial Intelligence Applications and Innovations Volume 187 of the series IFIP — The International Federation for Information Processing, pp. 301–312.

[14] C. Lin, G. Kou, D. Ergu(2013), "A heuristic approach for deriving the priority vector in AHP", Applied Mathematical Modelling 37, pp. 5828–5836.

[15] M. Mohri, A. Rostamizadeh, A. Talwalkar (2012), Foundations of Machine Learning, The MIT Press.

[16] J. M. Moreno-Jiménez, J. A. Joven, A. R. Pirla, A. T. Laruza (2005), "A spreadsheet module for consistent consensus building in AHP-Group decision making", Group Decision and Negotiation 14, pp. 89–108.

[17] J. M. Moreno-Jiménez, J. Aguaron, M. T. Escobar (2008), "The core of consistency in AHP-group decision making", Group Decision and Negotiation 17, pp. 249–265.

[18] K. Nishizawa (2005), "Estimation of unknown comparisons in incomplete AHP and its compensation", Report of the Research Institute of Industrial Technology, Nihon University Number 77, pp. 1–10.

[19] J. I. Pelez, M. T. Lamata (2003), "A new measure of consistency for positive reciprocal matrices", Computers and Mathematics with Applications 46, pp. 1839–1845.

[20] V. Pereira, H. G. Costa (2015), "Nonlinear programming applied to the reduction of inconsistency in the AHP method", Annals of Operations Research 229, pp. 635–655.

[21] M. Rahmami, H. Navidi (2009), "A new approach to improve inconsistency in the Analytical Hierarchy Process", Applications and Applied Mathematics: An International Journal 4(1), pp. 40–51.

[22] T. L. Saaty (1977), "A scaling method for priorities in hierarchical structures", Journal of Mathematical Psychology 15, pp. 234–281.

[23] T. L. Saaty (1980), The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill.

[24] T. L. Saaty, G. Hu (1998), "Ranking by eigenvector versus other methods in the Analytic Hierarchy Process", Appl. Math. Lett. 11(4), pp. 121–125.

[25] T. L. Saaty (2001), Fundamentals of Decision Making and Priority Theory. Pittsburgh, Pennsylvania: RWS Publications.

[26] T. L. Saaty (2003), "Decision-making with the AHP: Why is the principle eigenvector necessary?", European Journal of Operational Research 145, pp. 85–91.

［27］ T. L. Saaty (2005), Theory and Applications of the Analytic Network Process, Pittsburgh, PA: RWS Publications, Pittsburgh.

［28］ T. L. Saaty (2008), "Relative measurement and its generalization in decision making why pairwise comparisons are central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors the Analytic Hierarchy/Network Process", RACSAM Rev. R. Acad. Cien. Series A. Mat., 102 (2), pp. 251–318.

［29］ S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo (1998), "Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP", Journal of the Operations Research Society of Japan 41, pp. 404–414.

［30］ L. V. Ukin (2009), "A new ranking procedure by incomplete pairwise comparisons using preference subsets", Intelligent Data Analysis 13(2), pp. 229–241.

［31］ L. G. Vargas (1983), "Analysis of sensitivity of reciprocal matrices", Applied Mathematics and Computation 12, pp. 301–320.

［32］ L. G. Vargas (1990), "An overview of the analytic hierarchy process and its applications", European Journal of Operational Research 48, pp. 2–8.

［33］ W. C. Wedley (1993), "Consistency prediction for incomplete AHP matrices", Mathematical and Computer Modelling 17, pp. 151–161.

［34］ Z. Xu, C. Wei (1999), "A consistency improving method in the analytic hierarchy process", European Journal of Operational Research 116, pp. 443–449.

［35］ 岩田具治（2015），『トピックモデル（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［36］ 岡谷貴之（2015），『深層学習（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［37］ 金森敬文（2015），『統計的学習理論（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［38］ 菅　民郎（2007），『らくらく図解　アンケート分析教室』，オーム社

［39］ 木下栄蔵（2000），『AHPの理論と実際』，日科技連出版社

［40］ 鈴木大慈（2015），『確率的最適化（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［41］ 杉山　将（2015），『機械学習のための確率と統計（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［42］ 高橋磐郎（1998），「講座―AHPからANPへの諸問題，I–V」，オペレーションズ・リサーチ，1998年1–5月号

［43］ 竹内一郎，烏山正幸（2015），『サポートベクトルマシン（機械学習プロフェッショナルシリーズ）』，講談社

［44］ 田中　豊，他訳（2008），『一般化線形モデル入門』，共立出版

［45］ 刀根　薫（1986），『ゲーム感覚意思決定法―AHP入門』，日科技連出版

［46］ 刀根　薫，真鍋龍太郎（1990），『AHP事例集』，日科技連出版

［47］ 長畑秀和（2001），『多変量解析へのステップ』，共立出版

［48］ 日経コンピュータ（編集）（2015），『（日経BPムック）すべてわかるビッグデータ大全　2015–2016』，日経BP社