

〔論文〕

新たな認識論理の構築12

——認識論から見た無限——

鈴木 啓 司

名古屋学院大学外国語学部

要 旨

認識論理の重要概念、共有知識には、無限連言の問題が付きまどってきた。それは無限を数量的に扱うがために発生してきたものと思われる。そこで認識の原点に立ち返り、無限を認識論的に見直すというのが、本論の試みである。その際、重要となってくるのが、認識の基本構造である「絵と地」の関係である。新認識論理では、無限大を「囲い込めない地」、無限小を「無にできない絵」として捉える。必然的帰結として、仮無限・実無限、可算無限・非可算無限にも新たな像を付与する。さらに、対数的数概念 ($n = x^n$) を導入し、2次元の絵に3次元的深みを与える。これにより、複素数平面上に描かれる数が湧出する場（それは脳なのか）のごとき存在をイメージ化せんとする。最後に、地の連続場から自然数を切り出す折り目としての素数像を示唆して終わる。

キーワード：無限、絵と地、対数的数概念

Building a New Epistemic Logic 12

——Infinity Viewed from Epistemology——

Keiji SUZUKI

Faculty of Foreign Studies
Nagoya Gakuin University

新認識論理は、もともと共有知識を形式化するために構想された。それは、個体エージェントに基づいた従来の論理形式の枠組みではこの問題は捉えきれないと、筆者が常々考えていたからである。共有知識は、複数エージェントが互いに「知っていることを知っている」、すなわち、エージェントAはPを知っていて、かつ、エージェントBもPを知っていて、かつ、そのことをAは知っていて、かつ、そのことをBは知っていて、かつ、さらにそのことをAは知っていて、かつ、さらにそのことをBは知っていて……というような無限連言の形で表される。これはコンパクトな形式化という観点に立てば、非常に厄介な形である。その困難さの原因は、従来の論理が共有知識を点的な単体エージェント間の情報確認キャッチボールとして見たことにあり、筆者はこれまでに指摘してきた。かわって、自己と他者よりなる線的な複合エージェントの概念を土台に共有知識に新たな形を与えようというのが、新認識論理の出発点である。その過程で、(1)のベキ乗場や対数的数概念など、ずいぶん突飛な(?)アイデアを提出してきたが、これはひとえに、抽象的な哲学的思弁に終始せず、できうる限り明確な形式化を試みようという意図の表れである。そこで本論では、共有知識に限らず広い範囲で厄介もの(と同時に実り豊かなもの)であるこの無限という概念を、新認識論理の観点から今一度(すでに簡単には触れた¹⁾)メインテーマとして取りあげ、この漠たるものに新たな形を与えてみたいと思う。

無限小史

無限といえば、第一に関係する学問分野は数学である。ために、専門家でもない筆者が認識論的な数解釈に関する論文を書いた経緯が過去にあるのであるが²⁾、ここで、本論の趣旨にそった形で、数学における無限の歴史をごくごく簡単にまとめておこう。

周知のとおり、古代ギリシャ人は無限を嫌った。アルキメデスの先駆的な円周率の計算があるにせよ、測量術から幾何学を発展させた彼らの実践的精神にとり、無限を正面から扱うことの危険性は自明のことと映ったのであろう。アリストテレスにしても、無限へと向かってゆく過程としての仮無限は認めたが、完成された無限そのものである実無限は認めなかった。実無限としての無限が初めて数学史上に明確な形で現れたのは、微積分を介してであろう。最初は無限小解析とも呼ばれていたように、そこには、0ではないがどんな実数よりも小さな数という無限小の概念が登場する。これを微積分の応用例に即して具体的な形でいうと、たとえば瞬間の幅ということになる。微分は加速度運動している物体のある瞬間の速度を割り出すのに使えるが、速度の形式的表現は、ある時間内に進んだ距離とその時間との比である。では、瞬間はどれくらいの時間幅か。それは限りなく0に近い時間の点のようなものであろう。しかし、幅0では速度を設定することができない。ここで無限小という、何やらよく分からない定量がむりやりひねり出されたのである(ニュートンと並ぶ微積分の創始者であるライプニッツは、はっきりこれをフィクショナルなものであるといている)。しかし、これは厳密さをウリとする数学にとってはどうにもすわりの悪い概念であることは間違いない。そこで、のちにコーシー、ワイエルシュトラースらによって、極限值という点にいくらでも近づいてゆけるアルゴリズムの形で、動的な論法に書き換

えられていった。確かに、無限小という正体不明の定量（実無限）より、極限值に至るダイナミズム（仮無限）として扱ったほうが、途中の過程は有限量なのだからより確かなものであることは明らかだ。こうして初めてあからさまに顔を出しかけた実無限は、巧妙に回避され別の論法にすげ替えられたのである。

その実無限を正面切って数学に取り込もうとしたのが、カントールである。ここではもう彼の理論の詳細には立ち入らない。これまでおりに触れ言及してきたが、要は、集合という概念でもって自然数全体、実数全体を実無限として扱おうとした、画期的かつ無謀ともいえる革命的理論である。しかし、それはやはりパンドラの箱を開ける結果となった（実り多い結果だが）。深刻な矛盾が生じたのである。簡単にいえば、集合とはあるものを目に見えぬ境界線で囲むことであるが、無限とは文字通りそうした限界を拒否するものである。矛盾が起こって当然であろう。これに対処する方法として、ブラウアーは直観主義という考えを提唱した。人間の直観を超えた実無限などは考慮せず、想像域内の仮無限にとどめようという姿勢である。そしてその範囲でしっかり構成された現物だけを数学的存在として認めようという思想である。この考えにのっとれば、 π はすでにその全体がどこか（神の手元か）に完結してあるのではなく、 π 計算のアルゴリズムによって今現段階の姿で生み出されつつあるという見方になる。古代ギリシャ人の賢明なる方策への先祖がえりとも、ある意味取れる。だが、仮無限にしても、無限に計算を続けてゆけるといふ確信の背景にあるものは何なのであろう。それは無限の計算過程を一つのセット（集合）として見る超越的視点が根底にあるからこそではないか。ブラウアーに対し、カントールの切り開いた自由な数学の「楽園」をあくまで保持しようとしたのが、ヒルベルトである。彼は、無限という意味解釈にこだわると矛盾を招き入れるのであって、数学といえどもその実態は有限な数の記号操作に過ぎないのだから、その操作ルールに矛盾がなければ問題なしとして、数学から意味解釈を極力そぎ落とした形式主義の立場を打ち出した。しかし、この方向からの数学の無矛盾性の証明がうまくいかないことは、周知のように、ゲーデルの不完全性定理によって明らかになった。彼の証明法により、意味を剥奪した記号操作としての数学を語るメタ数学も記号化（自然数化）でき、そこでもやはり無限という解釈が介入することが分かったのである。数学とは確かに、ヘルマン・ワイルのいうように、どこまでいっても「無限を扱う学問」であるかのごとくである。そしてこの学問は、無限を扱う限りにおいて完成されたものではなく、どこまでいっても「不完全な」発展途上の道にある。それかあらぬか、初期微積分の無限小は、20世紀においてA. ロビンソンの超準解析により、超実数として新たな数の実体を与えられた。無限集合に関しても、到達不能基数など、これまでない数の概念を導入して研究が進められているのが現状である。

以上、数学における無限の歴史を簡単にたどってきたが、無限の問題は数学にとどまるものであろうか。われわれはふだん無限などというものを意識したり、考えたりすることはほとんどないが、それはわれわれの認識の根底に自然な形で拡がっているような気がする。だが、有限なる存在である人間に無限が自然に備わっているとはどういうことか。これはデカルトの有名な神の存在証明の出発点にもなった問いであるが（彼はここから神という無限者の客観的存在を引き出す）、筆者は無限を数量ではなく認識的見地から捉えることによって、この問いにはもっと無理

なく答えられるものとする。そこで、以前に書いた「認識論的に見た数体系」³⁾をふまえ、改めて無限をここで捉え直し、よってこのテーマにまつわるアポリアを払拭してみたいと思う。

認識論的数体系における無限

集合論における無限の問題は、集合論が要素（個体）と集合（概念）の関係を明確に定義していないことにあるとは、すでに指摘した⁴⁾。定義上は要素が集まって集合となるのだが、その要素は集合という概念があってこそ成り立つ。このトートロジックな関係が、もう外のない無限集合となると、要素とそれらを囲む境界線が混じりあい、階型破りのパラドクスを生ぜしめるのである。それを避けるために筆者が提出したのが、認識論的数概念である。詳細は当論文に当たっていただきたいが、そこでは、数は認識の基本構造である絵と地の概念で捉えられる。正数が絵であり、負数が地である。イメージ図で描くところなる。

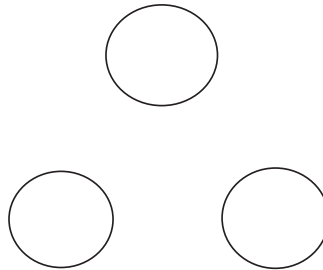


図1 3の絵（各円の内部）3の地（各円の外部。このとき円は穴と捉えられる）

これは離散的な自然数の絵であるが、連続的な実数となると次のようになる。

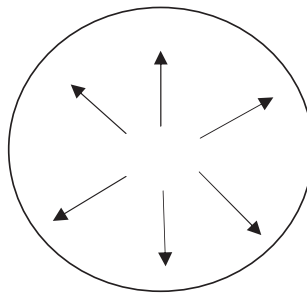


図2 拡大する円

数と量を絵にすれば、このようになるであろう。そしてこのイメージ図をもとに無限を定義すると、次のようになる。

無限小（絵） 決して無（0）にならないもの
無限大（地） 決して囲い込めないもの

絵は存在するから絵なのである。無になったときは地である。対し、地は決して囲い込めない。囲い込まれたらそれは絵である。数量的（数学的）に見ると捉えがたい無限も、有限な存在である人間の認識構造に照らせば、至極自然なものとして受け入れられる。

さらに、上図を利用して、カントールが証明した可算無限と非可算無限の区別も視覚的に容易にイメージできる。前稿でも触れたが⁵⁾、カントールは対角線論法を使って自然数と実数の無限集合同士を比べ、両者は一対一対応付けすることができず後者に余りの要素が出てくることから、自然数を可算無限、実数を非可算無限として後者がより大きい無限集合であることを証明した。これを上のイメージ図に即していうと、地は囲い込めないものとして、自然数のような囲い込みでできる離散的な数では覆い尽くせないが、囲い込みならぬ、地の一点から湧いて出て広がってゆくような実数は、やがて地を覆い尽くす可能性を秘めている（断言はできないが）ということである。こうすると自然数と実数は別もののように聞こえるが、いうまでもなく自然数は実数の一部である。カントールも両無限集合の大小関係を、 $N < 2^N$ とはっきり数値化して関連付けている。こうしたことは上図の実数円を段階的に分けたものが自然数と捉えればよいであろう（下図参照）。地は決してn番目の自然数円で覆われることはないのである。

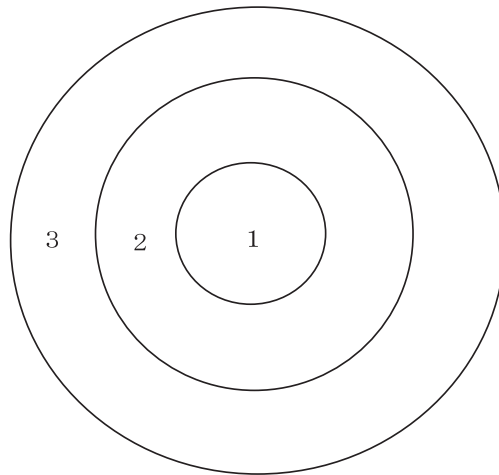


図3

だが、上図における自然数、実数はいずれも限りなく増殖、拡大してゆく意味で、仮無限である。では実無限はどこにあるのであろう。それは絵にならない、まさに地のことである。カントールのもたらしたパラドクスは、この絵にならない実無限を形にしようとしたことにある。数学は仮無限で満足していれば問題はなかったのだ（哲学的思考を促す刺激には欠けたろうが）。ただ、その大胆な挑戦が後の豊かな数学基礎論の展開を生み、数学のイメージを大きく（おそらくよい方向に）変えたことも事実である。数学はそれ自身で自己完結完成されたものではなく、発展途上にあり何か外のものに支えられた体系であることが明らかになったのである。その外は従来の形式化の手法にのっとり絵にしようすると、たちまちその本性を失ってしまう永遠に取り込め

ない地である。その意味で、数学の体系はどこまでも不完全であることを定められているのである。

その絵にならぬ地になんとか形を与えようというのが、新認識論の目標であった。それは当然、従来の形式化とは違った方法を取らざるをえない。そこで筆者は以前に⁶⁾、実無限に ∞ という記号を振り、新たな概念化を試みた。「無限を扱う学問」である数学の無限はあくまで仮無限 ∞ であり、実無限はそれとは異質な形式化を要する概念と割り切るのである。それに従って無限の関係図を作成すると、次のようになる。

$$\text{地} \quad \infty \quad \text{実無限} \quad \quad \quad \text{絵} \quad \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{離散的仮無限－可算無限集合－自然数（を含む有理数）} \\ \text{連続的仮無限－非可算無限集合－実数（有理数と無理数）} \end{array} \right.$$

われわれのいう数学はあくまでも絵の部分である。地をそこに取り込もうとすると、どうしても不完全性のサイクルに陥るわけであるが、そこで登場したのが、 ∞ という飛躍的な概念である。それは当然、正統的な形式化（ここでは記号化、数値化するという意味に取っていただきたい）を受け付けられない類のものであるが、ここで終わってしまえば、あまりにも漠然混沌としているとの謗りを免れないであろう。そこでもう少しこれにカタチを与えてみよう。

地から絵が立ちあがるというが、何もない無から何かが生まれるとは、どうも想像しがたい。そこには何かがあるのであろう。では、地とは何なのか。その数的イメージとして考え出されたのが、(1) のベキ乗場であった。

$$1^{0+1+1+1+\dots} = 1^n$$

.....

$$(1) \times (1) \times (1) \times (1) \dots = 1$$

上部の指数で表された自然数を生み出す下部が、数になる前の何かある地である（ $=1$ とは存在するという意味だ）。ここに切れ目が入ることによって地と絵が分かれたれ、数が現れるのであった。

$$1^{0+1+1+0-1-1-\dots}$$

.....

$$(1) \times (1) \times (1) \times [1] \times [1] \times [1] \dots$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \dots$$

[1] は絵から区別された地の部分であり、 $(1) \times (1) = 1$ の実数領域に対し、 $[1] \times [1] = -1$ の虚数領域である（今さらながらお断りしておくが、() も [] も従来の数学記号の開集合、閉集合とは何の関係もない）。そして負数は、たとえば -2 なら、絵2の地を指示する数となる。そして $(1) \times [1] = 0$ となり、これは絵と地の境界を表す。すなわち、認識論的に見た数は、無も無限大もない体系である。詳細は前稿を参照してほしい⁷⁾。

では、数が湧き上がってくるこのベキ乗場に、それらはどう埋まっているのか。先の図3を見ると、実数円が段階的に水平に拡がってゆくようにも見えるが、自然数円が重なってゆく垂直的な見方もできる。すなわち、この平面上の点は深みをもった点なのだ。そこから、あたかもビッ

グバン直前の宇宙創成の特異点でもあるかのように、数が湧いて出るのである。この深みとしての(1)のべき乗場をより数的に視覚化せんとして編み出したのが、対数的数概念である。自然数を1の集合(加算)としてではなく、 n の n 乗根の乗算として捉えるのである。すなわち、 $n = x^n$ である。以前に書いたその一部を再録しておく⁸⁾。

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[2]{2} = 1.41421356...$$

$$\sqrt[3]{3} = 1.44224957...$$

$$\sqrt[4]{4} = 1.41421356...$$

$$\sqrt[5]{5} = 1.37972966...$$

$$\sqrt[6]{6} = 1.34800615...$$

$$\sqrt[7]{7} = 1.32046924...$$

$$\sqrt[8]{8} = 1.29683955...$$

$$\sqrt[9]{9} = 1.276518007...$$

$$\sqrt[10]{10} = 1.25892541...$$

$$\sqrt[11]{11} = 1.24357522...$$

$$\sqrt[12]{12} = 1.230075505...$$

⋮

$$\sqrt[100]{100} = 1.04712854...$$

⋮

$$\sqrt[200]{200} = 1.02684560...$$

⋮

$$\sqrt[1000]{1000} = 1.00693166...$$

⋮

$$\sqrt[\infty]{\infty} = 1?$$

$\sqrt[n]{1}$ は、 $(1) \times (1) = 1$ により数をなすべき乗場では本来意味をもたない。 $\sqrt[\infty]{\infty} = 1$ が成立して再帰的にここに登場したと見てもらいたい。そして、 $\sqrt[\infty]{\infty} = 1$ の ∞ も、本当は実無限 ∞ と書くべきであることに留意してほしい。数学ではあくまで $1^\infty = 1$ であり、 $\sqrt[\infty]{\infty} = 1$ のままでは矛盾をきたすからだ。実無限とは、 $1^\infty = \infty$ となるような無限のことであり、やはり、従来の数学の外(地)にあるべきもののなのである。

この対数的数概念で実数線を見ると、それはこれまでと違った様相を見せる。従来は、まず1が継ぎ足されていって自然数を構成し、その1が分けられ、あるいは自然数同士の比で有理数(分数)を生み、さらに有理数の無限級数の極限値といった形で無理数が定義された。それは部分の加算的な構成法による実数直線といってよからう。しかし、この方法では実数の連続性を表すのにどうしても不十分な点が残る。つなぎ目という問題である。現実には照らしてみても、つなぎ目のある連続とそれのない滑らかな連続とは違うであろう。そして、後者こそが真の連続と呼ぶにふさわしかろう。以前にも指摘したように、部分をつないで連続を構成するより、連続から部分

を切り出してくるほうが、自然であり理に適っている。対数的数概念による実数直線では、自然数は固定された最小単位1が継ぎ足されたものではなく、そのつど変化する底が重なりあった、部分の構成物ではない真の連続から切り出されたものである。そして、無限の果てに（もちろん量的な無限ではない。地全体ということ）底が1に収束することによって、最小単位1を元とするおなじみの自然数が再構成されるのである。この対数的数概念を当てはめ、実数直線に深み（下部構造）となる垂線を加えた2次元構造を思い描いてみよう。さらに、実数直線を実数円として2次元面で捉えた図3に、自然数で区切られた円の重なりという3次元構造を導入してみよう。各断片（円）1は、段差でつながった一続きである。すると、次図のようになる。

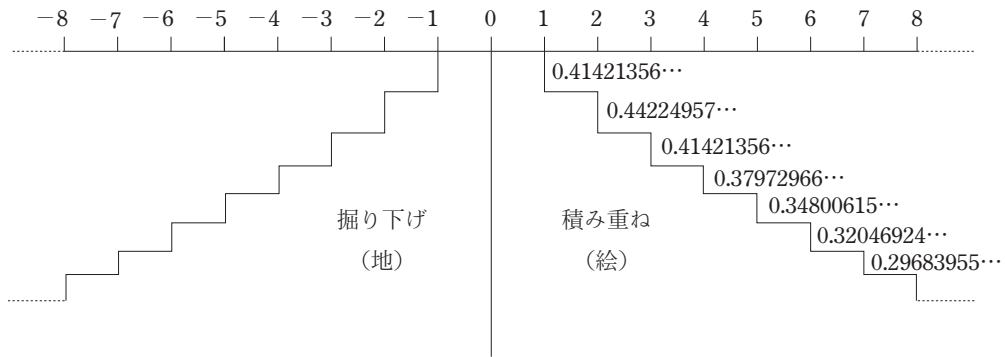


図4

負数方向は、わが認識論の数概念では、絵である正数に照応して地として自然に設定されるのであった。イメージ解釈としては、円が重なってゆくのではなく、穴が掘り下げられてゆくと思えばよい。ここからさらに飛躍して、実数線（1次元）に虚数線を加えた複素数平面（2次元。すべての数はここに描ききれている）のもとに眺めると、その下部に隠れた数の3次元構造が直観的に（代数的には4元数というものがあるが）見えてこよう。

この階段は有理数を加えることで、さらに無限に細かくすることができる。指数は有理数でも可能であるからだ。そしてその段差となるのが、無理数なのである。ゆえに、これを実数階段と名付けよう。この階段は、有理数で無限に細かくし無限のかなたまで伸ばしてゆく限りなく実数直線に近づいて（変化して）ゆくわけであるが、それでも無理数という段差を秘めているのである。この3次元的深みは、いったい何を表しているのであろうか。筆者が思うに、それは脳の立体構造に当てはまるものではないか。形式論理は平面に描かれた論理回路によって表され、実践的にも、2次元の基板上に作られた集積回路のもとで計算されている。しかし、それはあくまで絵になってからの話であって、ここにはそれを生み出す地の影はまったくない。その地は何か深みを持ち、平面的な絵ではとても表現しきれないものだ。ただ、これは現段階では筆者の憶測的な解釈に過ぎない。1000億個以上のニューロン（神経細胞）をもつ脳という立体構造物は、まだまだ絵にならぬ広大な地を抱えているのであって、その解明は今後の脳科学の発展に待つとして、筆者としては、とりあえずそこに何がしかの形式表現を与えてみたただけである。そ

ここで最後に、脳を想定した球体上にマッピングした実数階段の立体モデルを提示しておこう。

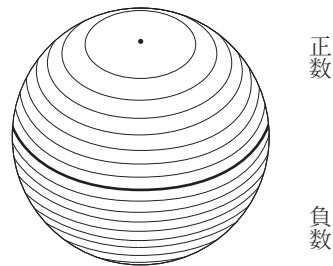


図5 (ジョン・スティルウェル『不可能へのあこがれ—数学の驚くべき真実—』をもとに作成)

地球でいえば赤道にあたる中央の大円を境に、正数と負数は反転する。すなわち、積み重ねが掘り下げとなるのである。図5を2次元平面に埋め込むと、次図のようになる。

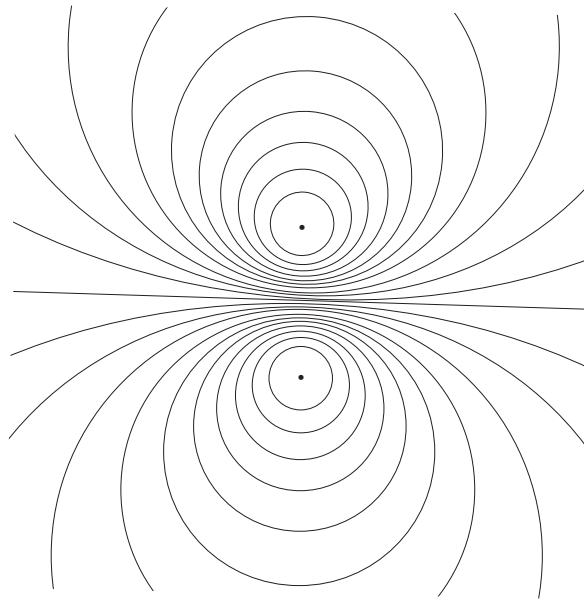


図6 (ジョン・スティルウェル『不可能へのあこがれ—数学の驚くべき真実—』をもとに作成)

これはちょうど、実数階段を上から見た俯瞰図にあたろう。0点を中心に対称関係にある実数直線上の正数と負数は、実は球面上の絵(内部)と地(外部)の反転関係にあるのである。それは、実数直線上の0点から右に無限に進むと、やがて左側からやってきて0点に達することを意味する。有限に込められた無限の最良のイメージといえよう。

結びにかえて一切れ目について

本論を終わるにあたって、一つ懸案事項を提出して締めくくりとしよう。これまで(1)のべ

キ乗場に切れ目が入ることによって数が生じるといつてきたが、それはどのようにして入るのか。数を集合論的に見て、実数直線の外から入れたのでは、それはほぼすべて無理数なのである。有理数に命中することは皆無といつてよい。その点でデデキントの有名な切斷の手法に飽き足らぬものを筆者が感じてきたことは、以前にも触れた⁹⁾。要するに、結果論的、論点先取の感が否めないのである。ここは一層、あらかじめ潜在的な切れ目が入っているとしたほうがよいのではないか。その手掛かりとなってくれるのが、素数である。前稿¹⁰⁾で紹介した対数的数概念では、各自然数は $\sqrt[n]{n}$ を底とした真数と対数として考えられるのであった。それに従い、2の2乗根、3の3乗根、6の6乗根を、それぞれa, b, cと置こう。すると、2は $a \times a$ 、3は $b \times b \times b$ 、6は $c \times c \times c \times c \times c \times c$ となる。ただし、素数ではない6は素因数分解して、 $a \times a \times b \times b \times b$ とも表せる。すなわち、各数は固有の底をもっているわけだが、素数以外は素数の底でも構成可能なわけである。言い換えると、素数は固有底でのみ構成可能な数ということになる。(1)のベキ乗場において素数底は、最初から交換不可能なものとして織り込まれているのではないか。それは図4の実数階段の強い折り目(切れ目)であり、そこから素数以外の数の固有底、弱い折り目が生まれる。この強い折り目に何らかの意味があるのかないのか。それは脳の構造と関係するものなのか¹¹⁾。これは興味の尽きせぬ今後の課題である。

註

- 1) 鈴木啓司2013,「新たな認識論理の構築9 —共有知識の新定義(続き)—」,名古屋学院大学論集(言語・文化篇) Vol. 24 No. 2
- 2) 鈴木啓司2011,「新たな認識論理の構築6 —認識論的に見た数体系の再解釈—」,名古屋学院大学論集(人文・自然科学篇) Vol. 47 No. 2
- 3) 同論文
- 4) 同論文, 論集p. 52
- 5) 鈴木啓司2013,「新たな認識論理の構築10 —決定は共同作業—」,名古屋学院大学論集(言語・文化篇) Vol. 25 No. 1
- 6) 前掲論文「新たな認識論理の構築9」, 論集p. 200
- 7) 前掲論文「新たな認識論理の構築6」
- 8) 前掲論文「新たな認識論理の構築9」
- 9) 前掲論文「新たな認識論理の構築6」, 論集p. 61
- 10) 鈴木啓司2014,「新たな認識論理の構築11 —主観を形式化する—」,名古屋学院大学論集(人文・自然科学篇) Vol. 51 No.1
- 11) 脳のデジタル的知覚ということで一言すると、筆者は、ウェーバー・フェヒナーの法則を思い出す。これは感覚刺激の識別に関する法則で、ごく簡単にいうと、連続的に変化する感覚刺激に対して、主観的識別はある一定の範囲で同じというものである。すなわち、刺激の変化を感じ取るのは飛び飛びにということである。これは音量、光量、圧力などに関わる多くの感覚で中程度の刺激に対し成立する法則である。なるほど、連続的な変化をすべて感じ取っていたのでは、脳は疲弊してしまうであろう。しかし、その刺激を受け取っているのは、脳を含めた連続的な身体なのである。

参考文献

ジョン・スティルウェル2014,『不可能へのあこがれ—数学の驚くべき真実—』, 柳谷晃 内田雅克 訳, 共立出版。