名古屋学院大学教職センター年報　第３号　pp.9-21

〔論文〕

初等教育法における数学の学び

―高等教育における学生のための算数とは―

宇　野　民　幸

名古屋学院大学スポーツ健康学部

要　　旨

本学ではスポーツ健康学部に，こどもスポーツ教育学科という小学校および幼児教育の教員養成課程があり，健康やスポーツという興味と関心のもとで教員を目指し学生が学んでいる姿がある。その課程を担うなかで，学生らは数学や算数の学びにおいても，演繹的で客観的に正しいことのみでなく，帰納的でも主体的な余裕のあるしっかりと本人が納得できる学びの修得を求めていることを期待できる。本稿では，これからの初等教育の教員養成課程において，教科と教職の大括り化と，幼児教育との連携が求められている今にちなみ，算数の教育と数学の内容とをつなぐ，身を持った学びのあり方への提案と実践について述べる。

キーワード：算数科教育法，数学と初等算数，図形と量物や半具体物，教科と教職

Learning Mathematics in the Method of Primary Education

―What is Elementary Mathematics for Students in Higher Education?―

Tamiyuki UNO

Faculty of Health and Sports

Nagoya Gakuin University

発行日　2019 年 2 月 28 日

1. はじめに－新しい教職課程において－

2015（平成 27）年 12 月の中央教育審議会答申「これからの学校教育を担う教員の資質能力の向上について～学び合い，高め合う教員養成コミュニティの構築に向けて～」においては，これまでも時代によらず教員として求められてきた資質能力に加え，自律的に学ぶ姿勢を持ち，その時代の変化に応じて求められる資質能力を生涯にわたり高めていく力という，いわば小手先の技術だけではない資質と能力が必要であるということが打ち出されている[1)注]。そのような資質や能力を身に付けるために，教員養成課程において，学生の教員として必要な学修について考えたときに，現状においては大学の教員の研究的な関心や専門性に偏った授業が展開されていることが課題として指摘されている。

教職課程の科目区分のいわゆる「大括り化」が図られることで，上記を含む教員養成に関する課題に対して具体的な取り組みに向かうべく，2016（平成 28）年 11 月には教育職員免許法が改正され，そして 2017（平成 29）年 11 月には教育職員免許法施行規則の改正がなされて，文部科学省令上の科目区分も大括り化されるに至っているところである。

その具体的な免許法改正としては，これまで，「教科に関する科目」（大学レベルの学問的・専門的内容），「教職に関する科目」（児童生徒への指導法など），そして「教科又は教職に関する科目」（いわゆる「または科目」と呼ばれるもの）が，改正後には「教科及び教職に関する科目」として大括り化されて，必要単位数もまとめられている。そして，免許法施行規則も改正されたことより，各大学の判断で，教科に関する専門的な内容とその指導法等の複数の事項の内容を組み合わせた授業内容をおこなうことが可能となる。

初等教育（あるいは幼児教育）においては，これまでの「教科に関する科目」としては，中等教育を踏まえた高等教育としての数学，「教職に関する科目」としては算数科の指導法といった分別がなされ，担当者も異なる（前者は数学者，後者は算数・数学教育学者）場合も多くある事情に対して，本稿では特に，その両者を括るとは，どのような授業の内容，教材が考えられるのかについて，課題を具体的に整理しながら，これまでの実践と提案について述べる。

2. 虫の視座で学ぶ数

上記の「教科に関する科目」（内容論）あるいは「教職に関する科目」（指導法）の算数科においては数字の記数法，特に位取りの原理についての理解を深めるために，ｎ進法の学習をする場合が多い。そこでは，通常の十進法で表記された数をｎ進法で表記したり，また逆にｎ進法で表記されている数を十進法で表記したりする内容や演習がなされる。教員採用試験または公務員の試験などにおいては，その内容に関連した，また，応用された問題が現在でもよく出題されている。

しかし，これらの内容や演習の出題の意図は，記数法の構造の理解に主眼があることに関わらず，上記の位取りの底の変換は，その方法を暗記してしまうことでこなすこともできる。実際にも，その方法にあるアルゴリズムから，位取りの構造を再認識することはできようが，その説明が十分されなければ，理屈はともかく問題を解く，ということが一般になってしまうことが懸念される。また特に教員採用試験などの時

間制限もあり正確な回答を選択肢より選ぶことが求められる場合の対策としては尚更であろう。

そのアルゴリズムの説明においても，教示する教員はその背後にある原理を理解していても，理屈を簡単に示すだけでは，学生はおそらく，十進位取りの原理は当たり前すぎること，そして，十以外の数のｎ進位取りについてそれまでは考えたこともないことがほとんどであることより,「テクニックでそうやれば答えは出る」，「求められていることに早く応えられる」，という意識が優先してしまうであろう。例えば，「間違えてもいいので，なぜその方法で記数法において位取りの底を変換させることができるのか説明をしてみよう」，という学修の余裕はほとんど与えられていない現状がある。

その理由には，公務員試験などにおいては，「その理由を記述せよ」という問題ではなく，テクニックをさらに磨いて，応用させて解く問題が例えば次のように出されていることがある

〔例１〕

４進法で表された数 122 を６進法でＸと表し，５進法で表された数 103 を６進法でＹと表したとき，Ｘ＋Ｙの値を６進法で表したときの数として，正しいのはどれか。

①130 ②131 ③132 ④133 ⑤134 ⑥135

〔例２〕

５進法で表された数 2400 と３進法で表された数 2010 との差を７進法で表した数はどれか。

①320 ②405 ③566 ④632 ⑤1234 ⑥2560

いずれも，位取りの変換ができる基礎の上でそれを応用して速やかに解くことが求められている問題といえる。

これらの例題は，それぞれ，底であるｎの異なる進法で表された数同士では和や差を求める演算が容易ではないため，まず十進法に変換したうえで，和や差を計算して，その十進法の答えをさらに指定された底であるｎ進法に変換するという方法で解答できる。

ここで，〔例１〕の解法において，４進法や５進法で与え示された数を,まず十進法にして，それぞれＸ’とＹ’としたとき，Ｘ’＋Ｙ’を求めてから，その答えを６進法に変換すればよいわけだが，「十進法のまま和を先に求めてよいか」ということに学生は疑問を持つ場合があろう。それは，それぞれ６進法で表し，という指示が問題にあるからである。しかし，最終的に求めたいＸ＋Ｙという値は，２つの量の和であることに違いはないので，通常の計算ができる和を求めてから，６進法の表記に直すことで解答できるのである。このことを，理解して計算を進めるためには，やはり本来はｎ進位取りの原理そのものを納得できている必要がある。

また，先にさらに６進法でＸは 42，Ｙは 44 と求めた場合に，その和を十進法として計算してしまうと，86 となってしまい，それから６進法にしても，222 となってしまい誤答となる。この値が選択肢にあれば，この間違いは少なくないであろう。６進法のまま計算する場合には，$42 + 44 = 130$　（式１）となり，正解①が導かれる。この計算の理解をするためにも，以下に示す量物（半具体物）の存在は有効であろう。

上記のような,変換の計算法は覚えていても，その利用・活用ができない可能性は，小学校の児童が，掛け算や割り算において，筆算の方法をもちいて，それで答えが求まる理由の納得や説明が十分でなくとも，解答を出し，またそれをさらに計算として応用することに力点が置か

れていく現状と重なることが指摘できる。

しかし，それは空位がある場合や小数のかけ算，そして小数の場合には割り算の余りを求める場合に，その理解の不十分さに気付く（つまずく）機会がおとずれるが，空位の０はとばして計算するテクニックや，積や商，そして余りの小数点の位置を定める方法もテクニックの暗記でさらに乗り越えてしまえば，（試験には）怖くはないとなってしまっている現状がある。

上述の掛け算・割り算の方法のしくみの理解のためにも，先述の位取りの原理の理解は要となり必要ともなる。

そのため，初等教育において位取りの原理の理解において数字と具体的なものとを結ぶ，中間的な量物（半具体物）の提示は重要である。

その理解を前提として，十進法の記数法をおこなっていき，日常では差支えない程の理解と技術を一般には修得することになるが，日常と離れた十以外のｎ進法による表現となると，位取りの原理を掘り起こして理解しなくてはいけなくなる。その際には，提示された底において，どのように位取りの表現がなされるかというところに立ち返り，学修を大きくスパイラルさせることが有効だと考えられる。

それは例えば，６進法であれば，位取りの底を「６」にして，繰り上がり位があがるたびに「じゅう」や「ひゃく」ではない，数詞を命名することで，十進法のそれと見た目（数字）は同じでも数は異なることを意識させることができ，そして量物（半具体物）による仲介をすることで，結束と分解を再認識したら，その命名された「１０」や「１００」は，十進法ではいくつに相当するかも，主体的に理解できることになる。これは，先程のｎ進法を十進法にする演習問題の基盤となるところであるといえ，むしろ本来的な目的としては，このような位取りの原理を再確認して教育に活かすことが大切ではないかと考える。

われわれが通常使用する十進法の由来が，人の指の数にあるとすると，虫，特に昆虫の世界であれば６進法が自然となるので，「虫の（視座からの）数」として，そのような導入と展開を算数科教育の授業では実践している。

（図１から図３は「虫の視座で学ぶ数」（宇野，2017）より引用。）

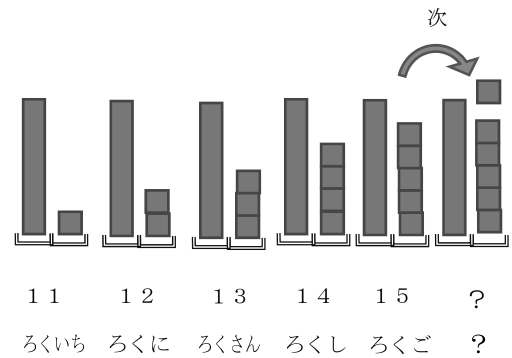


図１「虫の視座で学ぶ数」より

虫の世界（６進法）の位取りの数字と数詞について，それぞれ「２０」と「にろく」がよいことに気付くことをテーマとする。

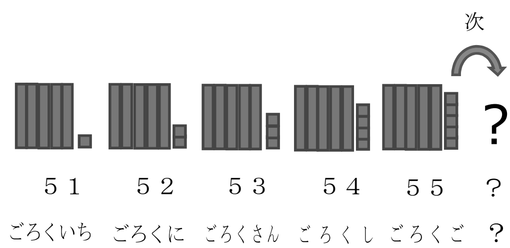


図２「虫の視座で学ぶ数」より（続き１）

３桁目の表記（量物，数字，そして数詞）について考えることをテーマとする。

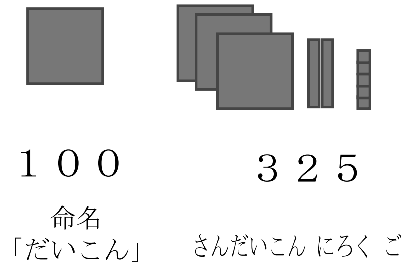


図３「虫の視座で学ぶ数」より（続き２）

特に３桁目の数詞は，その時に命名をする。

このような量物とその数詞の表現とともに，６進法の原理を理解し直すことにより，先程の〔例１〕の解法の一つであった６進法の式

$$42 + 44 = 130 \quad (\text{式１})$$

は，次の図４のように確かな理解ができる。

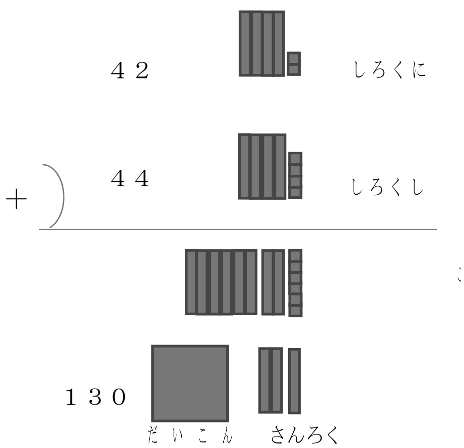


図４　虫の視座による計算のし方

また，このような理解がなされていれば，６進法における 100 を命名した例えば「だいこん」が登場しなくても，一の位がちょうど繰り上ることから，答えの下一桁が空位の 0 となることが分かるので，〔例１〕解答の選択肢から①を選ぶこともできる。

3. 互除法のアルゴリズムから

互除法というのは「ユークリッドの互除法」と呼ばれているもので，２つの整数の最大公約数を求めることができるアルゴリズムを割り算の筆算の要領でおこなう方法である。その手法は，やり方が分かれば，小学校でも整数同士の割り算を筆算でおこなうことができる技術をもちいておこなうことができる。しかし現在では小学校や中学校では，この方法は通常は習うことはなく，高等学校において 2012（平成24）年度からの教育課程において実施されている学習指導要領（2009 年度告示）のもと，「整数の性質」の内容として取り扱われることになっている。新たに 2018 年に告示された高等学校の学習指導要領においては，「整数の性質」は大項目とはされなくなっているが，この互除法については，数学Ａの「数学と人間の活動」の中で，引き続き扱うものとするとされている。

２つの整数（自然数）の最大公約数そして最小公倍数は，現在でも小学校の学習内容であり，２つの整数それぞれの約数，あるいは倍数を挙げていき，共通となるものを選ぶという作業を通して，その最大のもの，あるいは最小のものとして導き出すことができる。中学校においては，整数の素因数分解を学び，その概念を応用することで，求めることができることを学び修得するのが算数と数学の教育課程における現在の一般である。このユークリッドの互除法については，現行の教育課程においては，整数の性質の利用として，二元一次不定式の解法などで利用されているが，その互除法により最大公約数が求まること自体については，特に数学を得意としない場合には理解が十分でないことが多くあることが指摘されている[2)注]。

ゆえに高等教育の教員養成課程における，初等教育法あるいは初等算数においては，この原理が理解できるよう，先程のｎ進法において量物（半具体物）をもちいたのと同様にして，量物に相当する図形をもちいて確かな学力として身に付けてもらうことを筆者は試みている。

この量物による図形をもちいた方法は，高等学校の現行の教科書においても紹介されることがあるが，学生自らが試行錯誤しながら理解していくことにも意義があると考える。

例えば，５１と３０の最大公約数を求める際の具体的な互除法のアルゴリズムを図示すると，右の図５のようになる。

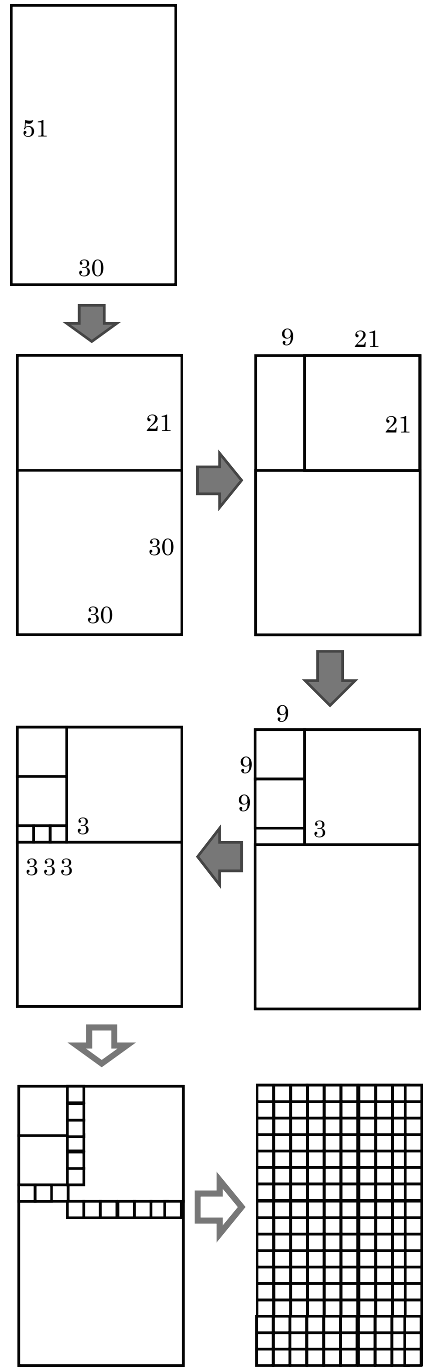
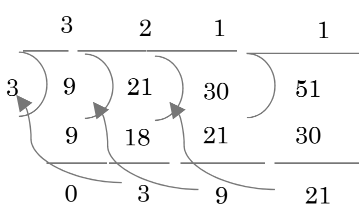


図５　ユークリッドの互除法の図示

図５は互除法により，２つの数の最大公約数が求まる仕組みを図示により表しているが，その計算方法としては，次の（式２）のように筆算としておこなうことができる。



（式２）

上記（式２）のように，その都度の余りを次の割る数にして，次々と（一つ前の割る数を）割っていく筆算の方法は現在も学生が知っている場合もあるが，この商と余りが先ほどの（図５）のそれぞれの段階において図示されているとは知らない場合が多い。そして，（図５）からは最終的に余りが０となる時の割る数（この場合は３）が最大公約数となり，それを一辺とする正方形は，初めに与えられた２つの数（５１と３０）を二辺とする長方形にちょうど

敷き詰められることから，その意味がまさに分かることになる。

最大の公約数となる理由は，余りは徐々に小さくなっていくが，もし公約数であれば，必ずその余り(次の割る数)も割り切るはずなので，初めてちょうど割り切った数が最大といえる。

このような図示により，他の数の組みに対しても同様に最大公約数が求まることを帰納的に理解することも期待できるが，他の組み合わせで再度試みることも確かな学力につながる。それは，例えば，余りが割る数より小さくなることと関連して，ちょうど割り切った場合には，この互除法のアルゴリズムは終結することや，２つの数が互いに素の場合には，必ず１まで辿り着くことなどの理解が図れることがある。

4. 無理数とは

上記の互除法のアルゴリズムを，量物となる図形をもちいてその原理から理解することは，そこでやらんとしていること自体が分かり，誤ってもちいた場合の修正や，段階が跳ぶ特別な場合や，終結する場合などの特殊性や必然性を把握するなど，身につく概念が多岐にあると考える。例えば，単に最大公約数を求めるだけであれば，中学校で学んだ素因数分解をもちいる方法や，さらにともに素数で割っていく方法が簡便かといえるが，特に素因数分解が困難な場合，すなわち約数も分かり難い場合でも，この互除法はもちいることができる。通常の演習の問題などにおいては，それらの分解ができる数が用意されているのが一般であるが，任意の２つの整数を挙げた場合には，むしろ互いに素になる場合も多くある。そして，そのアルゴリズムの中身を大切にする意義は，数同士の関係性の理解にもあり，これも，試行することで直観的，体感的に捉えることにもなる。

ここで,対象にする２つの数を整数に限らず,有理数の範囲で考えてみる。その２つの数を $\frac{q}{p}$ と $\frac{q'}{p'}$ （p,q,p',q'は整数）とした場合には，$\frac{qp'}{pp'}$ と $\frac{pq'}{pp'}$ と通分すると，qp'とpq'が互いに素であったとしても，$\frac{1}{pp'}$という，２つの対象の有理数を共に測りきる量（公約量または共約量といわれる）が存在することが分かる。この量が存在することは，先程のアルゴリズムを量的に図示する方法を考えることによっても推察することができる。

さて,これまでの２つの数の公約数(公約量)を求める手続きを量的・図的に理解することと同様の試みを，正方形の一辺と対角線の長さについておこなうと，どうなるのであろうか。

この場合には，その数同士は整数の比にはならないことより，最小公約数は１で終結しないが，それどころか，先程の公約量といわれる，その２つの量（長さ）をともに測りきることができる長さは存在しない，すなわち０となるという帰結となる。このことも，正方形の一辺の長さを１としたときに，対角線の長さは無理数となるという知識からではなく，先程のように図形により量的に示す方法が知られており，いわば体得的な理解ができる（図６）。

この図形が示しているのは，正方形の一辺で対角線の長さを測った時，一つ分はとれるが，二つ分はとれないこと（step1）がまず分かり，続いて，正方形の一辺を半径とした円と対角線との交点から，その円の接線を引くことにより（step2），対角線から正方形の一辺の長さを一

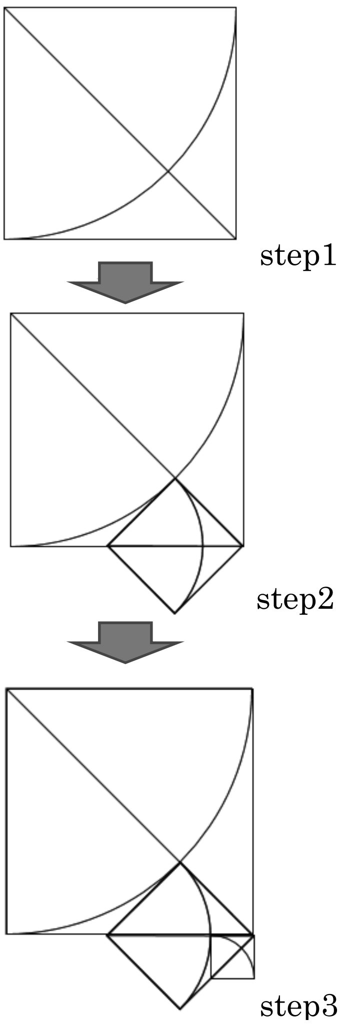


図６　正方形の一辺と対角線を比較する

つ分とった余りは，一辺の半分よりは短く，三等分よりは長いことが示される。このことは，円と接線の関係と対角線の性質から示すことができて，図形の問題の復習ともなる（図７）。そして，正方形の一辺から（図７）の余りが二つ分はとれて，三つ分は取れないことを，その余りを半径として円を描いて示すと，右下に辺を斜めにしてできる小さな正方形は，初めの（step1）における図形の相似形であることが分かる。そして、初めの正方形の一辺の長さを 1

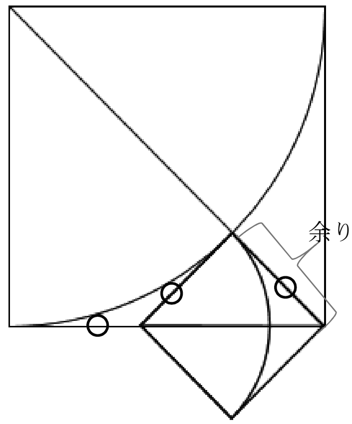


図７　図形による辺の比較の考察

として，対角線の長さをxとすると，（step2）により示されているのは，

$$1.5 = 1\frac{1}{2} > x > 1\frac{1}{3} = 1.333\cdots$$

（式３）

ということになる。続いて（step3）のように，同様の手続きを縮図のようにして，さらにおこなうことで，示される対角線の長さxの範囲は次のようになる（式４）。

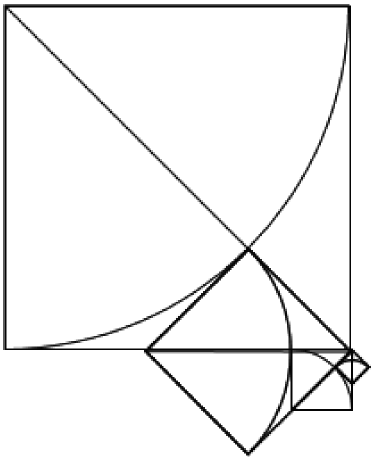
$$1.4 = \frac{7}{5} = 1\frac{1}{2\frac{1}{2}} < x < 1\frac{1}{2\frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$
$$= 1.428571\cdots$$

（式４）

（式４）において出てくる，分母にさらに分数が含まれて括線が組み込まれている分数は連分数といわれる。この連分数を小数にすることも，よい復習演題となる。この段階においても，無理数 $\sqrt{2}\,(= 1.41421356\cdots)$ として知られている対角線の長さ x は良い近似をしていることが分かる。

このように（図６）として示した図形的，そして量的な背景によるアルゴリズムによって，その図形は縮図となり延々と入れ子状に組み込

まれていくことが分かる（図８）。



step４

図８　図形による辺の比較の考察（続き）

この手続きは，先程の互除法のアルゴリズムが，永遠と繰り返されることとして，実際には作業を中断せざるを得ないが，あるいは描けないほどに細かくなるが，そのことより把握される概念は，どこまで経っても公約量が求まらないということであり，無理数というのは，そのように(有理数と)測りきる量を求めることが，そもそもムリであるということになる。

しかし，図８の step4 までで図示された段階における計算は次の（式５）となり，かなり近似されていることが分かる。

$$1\frac{1}{2\frac{1}{2\frac{1}{2\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}$$

$$=1.4137931\cdots$$

（式５）

そして，正方形の一辺を１とした場合の対角線の長さとは，次のような無限に続く連分数で示すことができる。この値が既知の$\sqrt{2}$である。

$$1\frac{1}{2\frac{1}{2\frac{1}{2\frac{1}{2\frac{1}{2\ddots}}}}}\ (=\sqrt{2})$$

（式６）

本学では，従来の教科に関する科目の初等算数に続き，初等算数（演習）という授業が設けられているため，このような展開を互除法のアルゴリズムを発展，継続する内容として扱い，無理数の概念の体感的な理解につなげる試みができる。

この無理数の値を,図示による量的なアルゴリズムから理解して近似する方法を，一辺の長さは 1，もう一辺の長さは 2 とする長方形の対角線に適用することを試みた図（図９）と近似の式(式７),そして,その対角線の長さの値 $\sqrt{5}$(= 2.2360679…)　を表す（無限）連分数を以下に参考として示す（式８）。

$$2\frac{1}{4\frac{1}{4\frac{1}{4\frac{1}{4}}}}=\frac{682}{305}$$

$$=2.2360655\cdots$$

（式７）

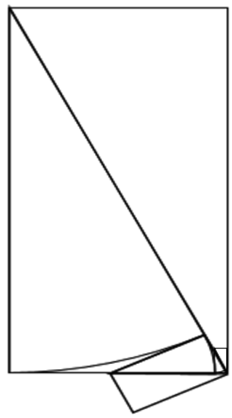


図９　長方形の一辺と対角線を比較する

$$2\cfrac{1}{4\cfrac{1}{4\cfrac{1}{4\cfrac{1}{4\cfrac{1}{4\ddots}}}}}\quad(=\sqrt{5})$$

（式８）

5. 算数における数学への学び

5-1　長さという量の表現について

前節までに紹介した整数の互除法や無理数の概念を体得するための量的な表現は，その図形の辺などの周の長さや内部の線の長さに対して考えられているものである。

これまでの学習においては，同じ式における有理数と無理数は別の項として表現されることを学ぶ。すなわち，先程の正方形の一辺と対角線を合わせた長さは，1＋1.4142…であるから，2.4142…と表現するよりも，$1+\sqrt{2}$ とすることが数学においては一般的であり，正確でもあるという学習がなされる。前節までにおいて考察したことと関連して，このことは，単に長さを近似して表現するだけではなく，有理数と無理数の違いを表現していることでもある。

このように，ある図形の周りや内部の長さを数にすることで，その数式の表現のあり方の理解と修得を改めてすることができる。図形としては，標準的に知られた正方形や長方形や円を分割したり，組み合わせてもちいるだけでも，対角線などその内部にある長さも考えることで，無理数としても代数的数といわれる，有理数を係数とする多項式の根として表現できる$\sqrt{2}$や$\sqrt{5}$などの無理数と，代数方程式の解としては表現されえない π や e などの超越数といわれる無理数とが，やはり別の項として表現されていることについても，図形と関連して体得できることがあると考えて，授業において実践をしている。例えば，先の（図６）における step1 の図形の周と内部の長さは全部で以下の（式９）となる。

$$4+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\pi \qquad \text{（式９）}$$

また，図６における step2 の長さは全部で次の（式１０）となる。

$$1+4\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \qquad \text{（式１０）}$$

これらの式の項は，すでに図形に組み込まれた部分や，その組み合わせを表していることに気付くことができる。

5-2　一対一の対応という方策について

一方で，算数科や就学前からの数の学びとして，数の一対一の対応という方策がある。これは，子どもが数字や数詞を学ぶ前においても，ものの個数という概念について，数同士の異同や多少について意識することを通して理解し

ていく大切な方法であり，いわば個数の直接比較と位置付けられる。しかし，初等教育の段階へ入る前において，すでに数詞や数字を覚えて活用する学びがほぼ一般にあり，その一対一対応という方法は数を学ぶ上では，すでに必要でないかのようになったり，原始的な嫌いがあるのか，むしろ使わないこともある。数詞をもちいることにより個数が把握できるのは，実際の個数と数詞とを一対一対応させて，いわば間接比較をおこなっているからであるが，直接的な個数の比較の方策は特に意識されないまま，数詞を暗唱してそらで唱えることをもって，その学習の前提とされる場合もよくある。

例えば，ある地域にある木の数が数え難い場合でも，木に一本ずつリボンを漏らさずに重複せずに巻き，それを回収することで，その木の本数は正確に把握することができる。また，あるイベントに三々五々に訪れる来場者に対して鉛筆を１本ずつ配り，その本数が後からでも分かれば，来場者の総数も把握することができるなど，空間的や時間的にも，数詞を使い難い場合にもできる分かり易い個数の間接比較がある。

このような実際の例は，現実的な場面において，正確さをある程度妥協したり，カウンターなどの機器を導入したり，あるいは技術と熟練により野鳥を数えるようなこととは違い，一般に誰でも心構えと準備があれば出来ることであるため，逆に成る程といった工夫感も少しあるが，それは間接比較というものを，数詞で代用するのが一般に簡便であり通常でもある算数の学習を受けているからでもあろう。

一対一に具体的な対応をして，個数を把握するという場面は実際の生活においては，一般にはそれほどにはないであろうが，数の集合の学びにおいては，次のような利用がある。

実数のなかで，分数で表現される有理数と，そうでない無理数は，どちらも無限の個数存在しており，その多さの違いを比較できるのか，という問題がある。その意味でいえば，自然数や整数も無限の個数存在しているが，直感的には有理数（分数）よりは少ない感じがするであろう。しかし，この自然数（あるいは整数）と有理数とは，方策により一対一に対応することができることが分かり，また，無理数はその対応ができるとすると矛盾を来すことで，前者を可算無限集合，後者を非可算無限集合といって，いわば無限のクラスを区別することができる。その方策についても，矛盾を導き出す論法についても，難しい方法ではないうえ，高等教育において学ぶ，実数という数についての理解の要になっているのは，実はこの一対一の対応の概念である。先述の誰でも出来る心構えと準備とは，その数を把握するという実生活のためだけではなく，数学的な考え方を拡大して，数そのものにある事実を知るためのものにもなる。

5-3　面積という概念について

図形の面積については，小学校において計算をして数値的に測定をする前において，時には就学前の段階から，「ひろさ」という量感を養う前提を培うためにも，直接比較や間接比較をおこなうことがなされる。そして，算数の学びとしては，そのように直接的に，また間接的にも，互いに面積を比べられない場合について，すなわち互いの図の形状によりどうしても，重ならない部分がある場合について，面積を特に計算する方法を考察していく。このような場合にも，適当にちぎったり，適当に細かくして埋め合わせたりするような，自由な発想と行動が

許されるなら，比較や測定の正確さについては譲ったとしても，その都度工夫をすることで，大体は比べることができるであろう。

また，個別的な任意の単位として，自由な面積の要素を単位としてもよい。この場合にも，隙間やあるいは重なりができれば，正確さについては大幅に譲る必要があるだろうが，そのように自由におこなっても，例えば図形同士が重ならない部分のみに適用するなどして，面積を概算的に比較できたり，把握できる場合もあるであろう。

高等学校までにおいて学ぶ，関数とともに計算する積分の考え方は，定義域にある値の微小な増加分に対しては，対応する値域の増加を横ばいとみなせるものとして，そうしてできる細かい短冊の集合の様に面積を捉えて計算する考え方に基づいている。しかし，変数の微小であっても一定の増加に対して，関数の増加が余りにも異なっていれば，この計算による面積は誤差を増していくことになる。先ほどの，子どものおこなうような，ちぎったり貼ったりの誤差と異なり，計算できているとしてしまい，誤差の修正から遠ざかる懸念があることが対照的である。小学校で学ぶ円の面積は，高等学校で学ぶ関数の積分としては計算されないのも，この理由による。通常の直交する座標ではなく，例えば，中心からの距離と角度で示す，極座標により計算することで面積が求まることになる。このような面積の考え方も小学校においては，扇形を細かく分割するイメージにより導入されているのである。

先ほどの自由な発想により面積を比べる，測るという取り組みは，面積という概念について，以降に学ぶ関数の計算により把握できる積分の考え方をすでに超えて，また，中等教育における球の表面積などを把握する場合において，その形状にこだわらない面積要素という考え方につながることでもあり，まさに高等教育において学ぶ積分の概念につながっている発想の芽ともなるのである。

6. おわりに

上記の通常において高等学校までに学ぶ積分（リーマン積分）を超える積分の概念や，空間における図形の面積や体積を考える際，面積要素という概念を考えることについては，先程の初等教育，あるいは幼児教育からできる，形が重ならなくとも自由にちぎって面積を比べる，あるいは隙間があっても自由な単位で比較してみるといった方法や表現が，正確さや，場合場合によるという理由から制限されたり，ダメ出しをされていたら，その発想の芽は摘まれてしまうことになる。そして，それまでの積分を超えるような自由な学びの意識にはつながらなかったり、周りにも再び見いだされる機会も狭められてしまうのではないか。

本稿では，大学などの高等教育において学ぶ数学の概念について，初等教育や就学前からある自由な発想や方法とつながる可能性を期待して見解を述べた。それらの概念が，身をもって実感できるような環境や教材づくり，そして手立ては，その場合によったり，また現状では，個々の子どもの興味や関心，そして疑問に思える感覚にもよるのが実際であろう。しかし，高等教育の教員養成課程における教科と教職の学びのなかで，「こどものやるその方法は面白い！」という思いが，数学的にもさらなる概念の自らの学びにつながるという見方や視座に得られたら，子どもと数学とに共に向き合える

可能性と機会をひろげ，身を持った学びはまた，心構えへとなるのではないだろうかと考えている。

本稿をまとめるにあたり，様々な表現についてご指摘をくださった本冊子の編集委員の方々と，いつも自由な発想に気づかせてくれる子どもたちと学生らに感謝の意をお伝えしたい。

注

1) 注 中央教育審議会答申「これからの学校教育を担う教員の資質能力の向上について～学び合い、高め合う教員養成コミュニティの構築に向けて～」（答申）2015（平成27）年12月
文部科学省HP＜
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1365665.htm＞（2018年11月30日参照）

2) 注 Kawaijyuku Guideline2013.４・５月号「座談会　新教育課程における「数学」に関する指導法」2013年　河合塾Kei－Net　HP＜
https://www.keinet.ne.jp/gl/13/04/shinkatei_1304.pdf＞（2018年11月30日参照）

引用文献

宇野民幸（2017）虫の視座で学ぶ数，名古屋学院大学教職センター年報，創刊号，pp.57－67

参考文献

文部科学省　高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編　2018年7月
文部科学省HP＜
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf＞（2018年11月30日参照）

文部科学省　小学校学習指導要領解説　算数編　2017 年7月，日本文教出版

志賀浩二（1990）ルベーグ積分30講，朝倉書店