

〔論文〕

新たな認識論理の構築14

——集合論を超えて 境界についての認識論的考察——

鈴木 啓 司

名古屋学院大学国際文化学部

要 旨

「モノそのものであること」の言語表現を目指す新物質主義に則り、人間というモノそのものの内部状態である「認識」を形式化しようとする論考の14篇目である。筆者は認識を基本的に「絵」と「地」の構図で捉えてきたが、そこには逸すべからざるトピックがある。境界の問題である。境界は絵なのか地なのか、内部なのか外部なのか、はたまた、どちらでもない独立した第三項なのか。境界について、論理、数学の基礎理論をなす集合論的見地が抱える問題から説き起こし、その限界を克服すべく対数的数概念を提示する。これは認識を表現するうえで以前より述べてきたアイデアであるが、本論ではより認識モデルに即した形で再考する。そして、新たな知識像として、集合論的情報をエージェントが共有するのではなく、動的な底のもとに真数、対数の関係でエージェントが協調する対数的モデルを提出する。要は、概念をモノとして語る言語、これが新物質主義の目標である。

キーワード：境界，集合，対数，協調

Building a New Epistemic Logic 14

——Beyond Set Theory Epistemological Idea of Boundaries——

Keiji SUZUKI

Faculty of Intercultural Studies
Nagoya Gakuin University

発行日 2017年1月31日

緒言

本論は「新たな認識論理の構築」シリーズの第14篇目にあたる。当初はこれほど長く書き連ねることになるとは思わなかった。始まりは共有知識の問題を考えるということであったが、そこからどんどんアイデアがふくらんで、認識の新たな形式的記述法を開発する必要性に気づかされたという次第である。その間、筆者の考えも多少の軌道修正を経てきているが、現在の思想的立ち位置を確認しておく、次のようになるであろう。まず、根源的な、認識ひいては心とは何かという心身問題に関しては、筆者は唯物論の立場に与するものである。とはいえ、従来の、心を物質に還元して説明しようとする物質還元論ではなく、心の解明しがたさは、ひとえに、モノそのものであることを表現したい言語の問題にあるとする考えである。言語は対象を外から、AなるものをBと言い換えて説明してくれる。さらに、その言い換えを普遍的な抽象概念にまで広げる。しかし、物質そのものであることを内から表現することはしてくれない。それは、言語の意味が指示記号と指示対象の関係性のうえに成り立っているからである。心の語りがたさは、人間という物質そのものである状態にまつわるものであって、「私」の特異性は、指示記号と指示対象がモノとして重なっていることに由来する。要は、物質それ自体であることをどう表現するかという問題である。筆者はこの態度を「新物質主義」と呼んだ。そして、その「モノそのもの」であることを表現可能な言語を構想したのである。もとより、机そのものであること、コウモリそのものであることは想像の埒外である。われわれの手元にあるのは、人間それ自体、私それ自身である。そして、その内部状態を指す一般的な概念として、認識に注目したわけである。

その認識の構造として、絵と地の概念を採用した。Aという絵を認識するためには、必ずAならぬ地も必要である。この考え自体は以前からあるものであるが、これを数学といった論理的精神活動にも広げて考えようというのが筆者の知見である。たとえば無限大は、数量的なものではなく、「どこまでいっても囲い込めない地」である。囲い込まれたとたん、それは絵になる。逆に絵は、「決して無にならない」無限小である。無になったとたん、それは地に溶け込む。ここから、1を可算的に足していって構成される従来の集合論的自然数観より、 n の n 乗根をもとにした対数的自然数観の方が認識レベルでは根源的であり、かつ表現力に富んでいることも示唆した。これについては、本論でも新たな展開を述べる。

かように、絵と地の構造で認識を捉えてきたのであるが、ここで重要なトピックが抜け落ちていることに気がついた。境界の問題である。絵と地を分ける境界とはいったい、絵に含まれるのか、地に含まれるのか（集合論的にいえば、閉集合なのか、開集合なのか）、それとも、それ自体で独立してあるものなのか。それは線なのか、何らかの広がりをもつものなのか。この境界という鶴的な存在をはっきり定義せずには、新たな認識論は開かれまい。集合論のネックとなっていたのも、実にこの境界の問題を曖昧にしていたことにあるのである。そこで本論では、これをめぐる集合論の限界から話を起こし、概念的、認識論的な観点から境界というものを考察し、もって対数的数概念より見た境界像というものを提示せんとする。それはわれわれの認識観ひいては世界観を大きく変えることにつながるだろう。

集合論における境界問題

筆者は以前の論文で、黒丸三つの図と、それを点線で囲んだ図の二つを示し、3はどちらかと読者に問うた¹⁾。要するに、3という数は、モノのみで成り立つのか、それとも、それを囲む概念で成り立つのか、ということである。日常感覚では前者ということになるろうか。だが、集合論的な答えは後者となる。この概念なるものが集合である。ゆえにそれは、一種の囲み線、境界とってよいものである。では、いったい何から数を囲い込むのか。それは数の存在しない空集合（記号で表すと \emptyset ）からである。そのため、集合論では数の存在しない空集合から数え始めるといった、一見奇異なことが行われる。 \emptyset すなわち0、それをカッコでくくって要素として、 $\{\emptyset\}$ すなわち1、それらを囲って、 $\{\{\emptyset\}\}$ すなわち2、さらにそれらを囲って、 $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ すなわち3といった具合である。この空集合を囲うことから始まった数は、もちろん空集合全体を囲い込んだわけではない。明示されていないが、空集合はつねに存在する数の地として囲いの外にあり続ける。こういうと何だか分かりづらいが、日常感覚に照らしていうと、何もない空間をたどっていつてふとモノに遭遇し、それを数えていつて数え切り、また何もない空間が続くといった情景を思い浮かべてもらえば、少しは感得できるのではなかろうか。数え切るということは、その先にもう何もないと分かることである。数とはかように空集合によってサンドイッチになっており、ここから、集合概念というものが一種の境界の役割を果たしていることがうかがえる（下図参照）。

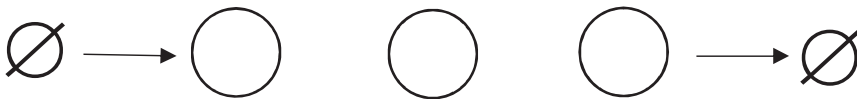


図1

では、空集合と数を隔てる境界（集合論の記号 $\{\}$ ）とは何なのであろうか。それはすなわち、集合とは何か、という問いに直結する。そして集合論は、複数の公理系があるとはいえずれも、この境界としての集合という問題を実に巧妙に回避しているのである。その方策が、空集合を0として数に取り込むことである。六世紀ごろにインドで発明された0は、すんなりとヨーロッパ数学に受け入れられたわけではない。そこにさまざまな紆余曲折があったことは、類書に詳しい²⁾。確かに無に記号を与え数として認めることには抵抗があろう。しかし、いったん認められると、今日われわれが恩恵に浴しているところの位取りなど、利便性の面で多くの優れた点があったわけである。それはひとえに、0という異質なメンバーをシステム内に取り込むことによって、それが数を区切る束ねる境界の役割を果たしていることによろう。そう、無という有である0は、内部でもあり外部でもある鶴的な境界そのものなのである。数の基本である自然数という集合は、0から始まり、小数点以下が0というふうにより0で区切られた、0を境界とする絵である³⁾。

だが、ここで問題が立ちふさがる。自然数全体は無限集合である（そもそも集合論は無限を扱うために誕生した）。始点の0はよいとして、では終点の0とは何であろうか。無限とはもうこれを超えるものはないというもののはずで、終点が0だとするとまたそこから数え始められることになる。外部なき無限集合を締めくくる（囲い込む）境界とは何であろうか。実はこの点が集合論においても曖

味なままなのである。そしてそこから、あの集合論をめぐるパラドクスも生まれたのである。では次に、このパラドクスを解決せんとした数学基礎論の展開を、境界という視点から駆け足で概観してみよう。

数学基礎論における境界問題

カントールの創始した集合論は、それまで数学が暗々裏に利用していたが明確に定義してこなかった実無限というものを初めて正面から扱った画期的な理論であったが、大きな課題も残した。それが、集合論のパラドクスと連続体仮説である。前者は簡単にいえば、すべての集合の集合というものを考えた場合、その集合自体は集合の要素なのか枠なのかというものである。どちらと捉えても矛盾が起こることを明確に示したのが、ラッセルの有名なパラドクスである⁴⁾。いずれにせよ、集合はおそらく無限にあるであろうから、これは、外部のない無限集合の境界をどう考えたらよいのか、という問いにつながる。後者の連続体仮説とは、次のようなものである。自然数という無限集合（数えられるので可算無限集合）のベキ集合（すべての部分集合の集合）が、実数（数えられないということで非可算無限集合あるいは連続体）という、より大きな無限集合になるのであるが（無限集合の間にも大小の序列があるということも驚くべき発見であった）、両者の中間の規模の無限集合はないであろうというのである。さらに、これより先も無限集合のベキ集合はより大きな無限集合を形成するのであるが、やはりその中間の規模の無限集合はないというのが、一般連続体仮説である。ここにも境界の問題が深くかかわっている。というのも、ベキ集合、すべての部分集合の集合という中には、空集合も含まれているからである。集合論のアポリアは、空集合＝境界問題を考えることで解決の糸口が見えてくる可能性をうかがわせる。

集合論のパラドクスについては、その解決にラッセル、ブラウアー、ヒルベルトといった俊英が果敢に挑戦した。その経緯は知的興奮を呼んでやまないが、ここではもう触れない。ただ、その一応の決着を見たゲーデルの不完全性定理と、それを受けたゲンツェンの自然数論の無矛盾性の証明について、境界の観点から一言しておきたい。ゲーデルは自然数論そのものを一つの集合と見たとってよい。そしてその中の命題を一つ一つ順序立てて数えあげる卓抜な手法（ゲーデル数）を編み出したのである。こうして、対角線論法（カントールも実数が自然数で数えあげられないことの証明に使った方法）を使って、自然数論内部からは数えあげられない命題を構成して見せた。それが、真偽いずれも決定不能な命題である（それは自然数論の無矛盾性を表す命題でもあった）。それは自然数論内部に証明式をもたない、すなわちどこからもたどれない、それでいて確かに自然数論内部にある（自然数論の無矛盾性を信じる限り）命題である。内部にあって外部、まさに境界のごとき存在である。無矛盾な集合として見た自然数論は、かような鶴的存在を抱えていたのである。ここで、出発点となるゲーデル数には0がないことに注目する必要がある（自然数としての0には1が当てられている）。ゲーデル数は素因数分解をもとに編み出されたアイデアである。すなわち積算である。積に0が混じっているとすべて0になってしまう。かように0をはぶくことでゲーデルの不完全性定理は、集合論が巧妙に始点の境界を0として取り込むことによって無限の終点である方の境界問題を回避した詐術を暴

いたのである。自然数論という絵が成立するためには何らかの地が必要であるという当然の事実を、改めて明らかにしたといえよう。そのとき正体不明のものとして立ちあがるのが、その狭間の境界である。

このゲーデルの結果を踏まえて、自然数論の無矛盾性証明に成功したのがゲンツェンである。これは何もゲーデルの不完全性定理が破られたことを意味しない。それは彼の採用した方法を見れば分かる。すなわち超限帰納法である。簡単にいうと、われわれになじみの数学的帰納法が下から数えあげ方法であるのに対し、超限帰納法は上から数えくだる方法といえようか。予想できると思うが、この方法は無限集合に関して有効である。それは、下からでは到達不可能な上の境界には触れず、その手前から順序数を数えくんだり下の境界0にいたるという証明法だからである。ちなみに、順序列が必ず最小要素にいたり底をもつ集合を、整列集合という。数学の証明とは要するに、定理と目する命題を段階的に公理に還元する作業と見なせる。ゆえに、証明のキモとは、証明したい命題に順序数で秩序づけられる（英語では順序も秩序も同じ単語orderである）整列過程を見出すことにあるといえよう⁵⁾。その意味で、ゲンツェンの一見アクロバティックな証明法は証明の本質に適ったものである。ただ、彼にしても、要素としての自然数の上限(可算超限順序数 ω)のさらに上の触れざる境界=外(非可算超限順序数 ε)を想定してその手前から数えくだるということで、ゲーデルの不完全性定理が暴いた自然数論の境界問題を最終的に解決したとはとてもいえないのである。

この自然数論の境界問題がより鮮明に表れているのが、連続体仮説である。無限集合はベキ集合の大小関係で整列しているという予想であったが、このベキ集合には空集合も含まれているところが曲者である。たとえば、 $\{1, 2, 3\}$ のベキ集合の要素は、 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, そして \emptyset の八つである。数式で表せば、 $2^3=8$ だ。すなわち、 n 個の要素をもつ集合のベキ集合の要素数は、 2^n ということになる。この式の意味は、一つ一つの要素が各部分集合に入っているか否かの二者択一の可能性の総数ということである。「入っている」に1を、「入っていない」に0を割り当てれば、上の例の場合、三桁に入る0と1の組み合わせの数となる。なるほどこの段でゆくと、 $\{0, 0, 0\}$ があってもおかしくはない。だが、これを無限集合に当てはめると、やはり境界に関する巧妙なトリックめいたものが見えてくるのである。上の例で分かるとおり、ベキ集合は元集合より要素数が当然多くなる。これは無限集合についてもいえることであろうか。というのも、無限集合に関しては、カントールの証明になる、自然数と整数、有理数の集合が同じ可算無限集合ということで同規模であるという事実が示すように、有限集合の常識が通じないところがあるからである。しかし、これもカントールが証明したように、無限集合においてもベキ集合は元集合より大きくなるのであった。そして、自然数のベキ集合 2^{ω} が実数の集合の大きさ（集合論の言葉でいえば濃度）になることも分かった。ベキ集合により境界は確実に外に広がるのである。かようにベキ集合がかかわる連続体仮説は、空集合=境界の問題を当然のごとくはらんでいるのである。

カントールは、無限集合においてもベキ集合が元集合より大きくなることを背理法を使って証明しているが、この定理は境界の観点に立つともっと直観的に理解できる。空集合を要素として取り込むということは、外部としての境界を内部に取り込むということである。それは元集合Aならぬものとして新たに要素に加わる。具体例で示すと、有理数の無限集合に、有理数の数列が収束する極限値と

しての無理数が加わることによってより大きな実数という無限集合ができるように。そうしてできた無限ベキ集合が元無限集合Aより大きくなることは、しごく当然といえよう。ただし、そのベキ集合の周りには、やはり地としての空集合が取り巻くように（境界のように）存在しているのである。これをイメージ図で示そう。

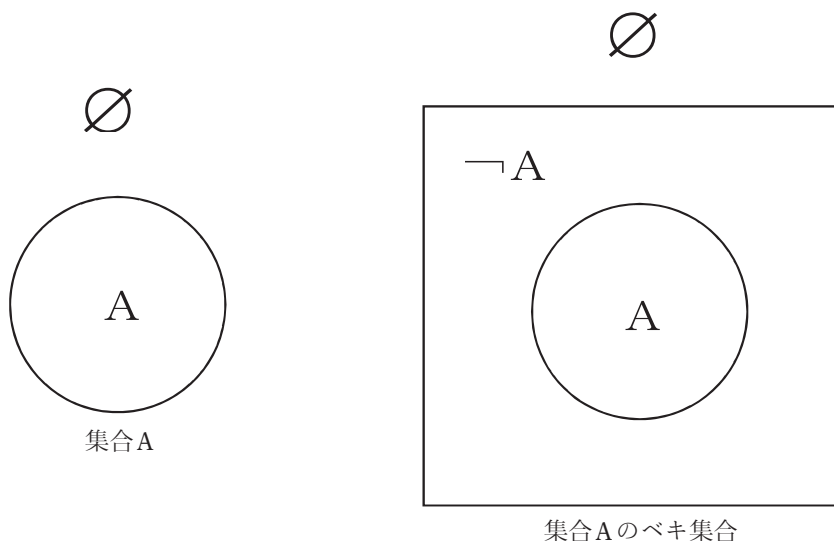


図2

ベキ集合を四角にしたのには、筆者の意図がある。それは集合論でおなじみのベン図式を読者に思い起こしてほしかったからである。ベン図式のAの補集合（ $\neg A$ ）は決して地ではなく、図式というからに絵なのである。かように集合論はあくまで絵を扱っているものであり、それを取り巻く地に関しては触れてこなかった。ゆえに、ド・モルガンの法則など従来の集合論理は絵における法則であって、認識論の視点からは、ベン図式の四角の枠を取り払った無限の地を視野に入れた論理が求められよう。ベキ集合とは、境界をなす地を取り込み元集合からより大きな集合を作る自己増殖方法と呼びうるが、取り込まれた地は絵となるのであり、絵の周りには必然的に新たな地が広がっているわけである。

かように境界とは、始点としての空集合（0）と、終点としての元集合ならぬもの（元集合を超えたもの、無限）が手を携える地点と見なせよう。それはちょうど、境界線がぐるりと一周してつながり絵を囲い込むイメージに重なる。問題は、絵自体が無限集合の場合である。そのとき境界は、カントールが思い描いたように、ベキ集合という一様のあり方をしているのであろうか。この連続体仮説の決着は今では一応ついている。それは、連続体仮説は現時点でのオーソドックスな集合論（すなわち数学）の公理系では真偽どちらも証明不可能（連続体仮説の白黒を裁くには、集合論に公理が足りない）というものである。それは、連続体仮説は集合論の公理系からは独立であるということを示し、平たくいうと、連続体仮説を肯定した集合論も、連続体仮説を否定した集合論も、どちらも矛盾なく成立するということを意味する。連続体仮説はまさに、数学の不完全性を証明するゲーデルの真偽証明不可能な命題だったのであり、それは境界という観点からも関連性をもっていたわけである。

連続体仮説の独立性の証明は、再びゲーデルと、集合の作り方に革命をもたらしたコーエンの二人

の合わせ技による。まずゲーデルが、構成可能性の公理の設定により、連続体仮説の否定の証明不可能なることを証明した。少なくとも連続体仮説は間違っているとはいえないということである。これはまだ、連続体仮説が正しいといっているわけではない。この証明方法の意味を簡単にいうと、集合というものがすべて構成的な方法で（具体的な要素を積みあげてゆくやり方で）作りうるものであるとしたら、連続体仮説のいうように無限集合はベキ集合の順序で整然と並んでいるということである。ところが、ここにコーエンが合わせ文字の残り半分といえるもう一つの結果をもたらした。すなわち、連続体仮説はその肯定も現行の集合論では証明不可能なのである。この証明には、ゲーデルの証明で使われた集合の構成可能性に対する、コーエン発案になる強制法という新たな集合の作り方が採用されている。詳細にはとても立ち入れないが、またイメージ図を使って境界の観点からざっと触れておこう。

連続体仮説を否定するには、自然数の集合とそのベキ集合である実数の集合との間に中間の規模の無限集合を作ってやればよい。その作り方が強制法である。それにはフィルターという概念が大いに活用される。フィルターにはいくつかの定義、種類があるが、ここで取りあげるのは、ベキ集合上のフィルターである。それは簡単に、ベキ集合から空集合をぬいたものを想像してもらえればよい⁶⁾。

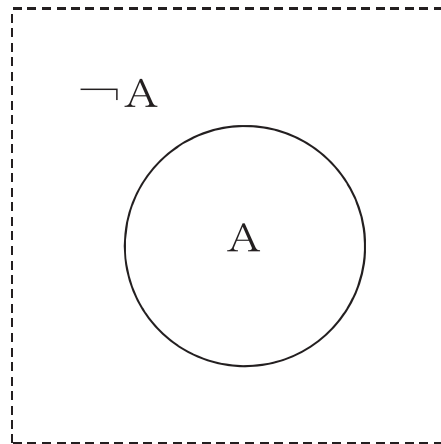


図3

これは \emptyset と $\neg A$ が手を携えて境界を閉じるベキ集合から、 $\neg A$ だけを取り込んだ集合である。そして、ここに強制条件なるものを課してAの拡大モデルを作るのである。作るといっても具体的に要素を構成するわけではない。ある条件を満たすか満たさないかという言説を並べてゆき、矛盾のないそうしたモデル（解釈）の存在を垣間見せるといった方がよい。こうして、自然数という最小の無限集合（カントールはその濃度を \aleph_0 と名づけた）とそのベキ集合である実数（カントールはこれを次の無限集合として \aleph_1 と名づけた。要するにこれが連続体仮説）の間に、中間規模の（いわば $\aleph_{0.5}$ ）の無限集合があってもよいことが示された。別のいい方をすれば、 \aleph の自然数的な順序づけにこだわると、自然数のベキ集合である実数ははたして \aleph_1 なのかということである。それは \aleph_2 、 \aleph_3 、あるいは \aleph_4 なのかもしれない。そして結論としては、0と1の間に無限の有理数があるように、実数は \aleph_∞ と考えてもよいのである。かように、ベキ集合の中間規模の無限集合はいくらでも作ることができる（その存在を示

唆することができる)のである。それを可能にしたのが、コーエンの画期的な集合の作り方、強制法であった。

連続体仮説の独立性が証明された以後の集合論は、この仮説を証明論的に肯定するには、あるいは否定するにはどんな公理を新たにつけ加えればよいのか、という方向に研究が進んでいる。その主流となっているのが、巨大基数の公理である。巨大基数には、到達不能基数、可測基数、コンパクト基数などさまざまなものがあるが、要は、連続体に関する命題を証明可能にするだけの大きな順序数を提供できる公理ということである。証明にはやはり順序数が鍵となるのである。

以上、境界の視点から集合論、数学基礎論の足取りを簡単にたどってきたが⁷⁾、境界の問題は数量的なレベルで解決可能なものではなく、認識論的見地が必要なものではないか、ということが見えてきたような気がする。元集合の全部分集合であるベキ集合にしても、筆者には、袋を裏返すようなイメージで捉えられる。すなわち、自分自身を含めた内部を外にさらけ出し、表面＝境界を内に取り込む行為である(現実の袋は大きさは変わらないが、集合はそのたび概念的に大きくなってゆくのである)。この裏返しの段階に無限の行程があることを示したのが、強制法であった。これらは、突飛なようだが、自己＝内部、他者＝外部という哲学的問題に重なるように思える。この両者は以前にも述べたように、反転可能であるからだ。それは両者が口の開いた袋のように、決して閉じた存在ではなく外に向かって開かれていることを意味する。その根底にはつねに、絵と地の認識構造がある。そして、ここで重要になってくるのが、繰り返し強調するが境界問題なのである。改めて問うが、境界とはいったい何なのか。そこで次に、筆者がかねてより提示してきた対数的数概念を、境界問題に照らして再考してみよう。

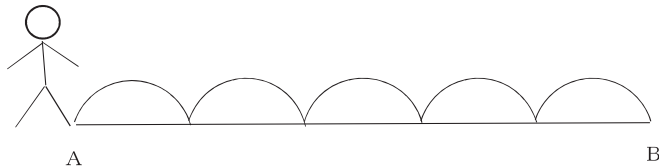
対数的数概念における境界問題

対数は、16世紀末に英国の数学者ジョン・ネイピアが、複雑な計算を簡単にすませる方法として編み出したものである。当時は大航海時代であり、また天動説から地動説への過渡期であった。測量、観測のために大きな数の計算が必要となったのである。そのとき、手間のかかる掛け算をより簡単な足し算の形にできれば、大いにはかがゆく。たとえば、 16×32 という計算は、 $2^4 \times 2^5$ という形にすれば、 2^{4+5} というふうに足し算の形で考えられる。この 2^4 の右肩に乗っている数を指数というが、これは2を4乗すればいくつになるかという意味である。それに対し、2を何乗すれば16になるかというのが、対数の考え方である。このとき2を底、16を真数、4を対数と呼ぶ。そして2を固定して、すべての数をあらかじめ2の累乗数としてみておくと、掛け算は足し算に、割り算は引き算にして考えることができるわけである。

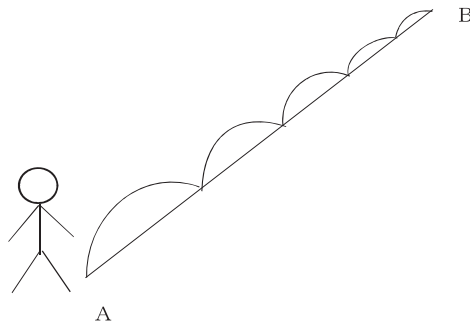
対数は単なる便利な計算の道具にとどまらない。それは底をいろいろと変えることで、それぞれの世界の見取り図を提供してくれる多様な尺度となる。われわれは日常生活では10進法になじんでいるので、10を底とした常用対数を学校で習うが、上記の2を底とした対数は、情報世界の尺度である(いわゆるビットという単位である)。自然科学の分野では、自然対数の底 $e = 2.71828\dots$ が使われる。このほかにも個別の領域で、音階は1.06が、星の明るさは2.5が、底となった世界である。マグニチュー

ド、ペーハー、デシベルも対数的単位である。

こうして見ると、通常の等差的尺度に交じって、対数的（等比的）尺度の意外に多いことに気づかされる。これは人間の認識機能の性格によるものと思われる。われわれの感覚器官は、連続的な等差的变化よりも、ある幅をもった対数的変化に感応しやすいのである。その意味で対数的に見た世界は、より認識構造の表現に適しているといえる。それは、客観的に計測された距離と主観的に認識された距離をイメージ図として比較して見るだけでも、感覚的に納得されよう。



客観的距離



主観的距離

図4

それでは、なぜ等差的尺度がわれわれの日常では主流になっているのか。そういった事情があるからこそネイピアも、1の等差数列よりなる自然数の複雑な掛け算を対数に戻す必要があったのではないか。そう、それは筆者には新たな発見というより、ある種の還元作業に見える。認識論的には対数的数概念がより根底にあるのであって、それが客観、すなわち他者との関係の中で、等差数列に変化したのであろう。このあたりの事情を、以前より筆者が提唱している（1）のベキ乗場モデルに即して考えてみよう。

認識論的数モデルの（1）のベキ乗場とは次のようなものである。

$$\frac{1^{0+1+1+1+1+\dots} = 1^\infty}{(1) \times (1) \times (1) \times (1) \times (1) \times (1) \times \dots = 1}$$

深層にあたる下段のまだ数ならぬ何かが無限に掛け合わされ1となり、それが表層の上段において1

の指数の足し算となる。コミュニケーション成立の根底にある認識の絡み合いをより視覚的に表現するために掛け算を第一原理に据えた数概念であるが、ここに切れ目が入ることで各自然数が形成されるのであった。すなわち、 $1^{0+1+1+1}$ で切れ目が入ると、それは3である。下段でいうと、 $(1) \times (1) \times (1) \times (1)$ で切れ目が入っている。

$$\frac{1^{0+1+1+1}}{(1) \times (1) \times (1) \times (1)} \times \frac{0-1-1-1\ldots}{[1] \times [1] \times [1] \times [1] \ldots} = 1^{-\infty} \text{ (無限小としての絵)} \\ = -1 \text{ (絵に対する地)}$$

そのとき(1)は、具体的な数 $\sqrt[3]{3} = 1.44224957\ldots$ に変わる。ただし最初の(1)は1である。対数では、 n^0 は1となる。ここにも、有である無0という、何か無理のある概念から始める集合の数よりも、1という純粋な有から始める対数の方が、認識論的にはより自然であることがうかがえる。一の指数と[1]は、正数(絵)に対する負数(地)を表している。問題はこの切れ目がどうして入るのかということである。

それには、前稿で提示した認識球体というモデルがかかわってくる⁸⁾。認識球体というのは、自己の視点と他者の視点をそれぞれ表す二つの球体が90度で交叉し重なり合ったものであった。自己意識の形成はどうしても他者の視点を導入しないでは説明不可能である。そのときポイントとなるのは、両者が90度で交叉しているということである(断るまでもないが、あくまで形式的にである)。他者というのは、想像されがちのように180度で自己に対峙しているのではない。それではいつまでたっても視野に収まる内部世界の対立者である。90度で直交しているからこそ、それはときに自己の内部に重なり、ときに自己を外部から見るものとなる。まさに、他者とは視野の境界に位置するものである(下図参照)。

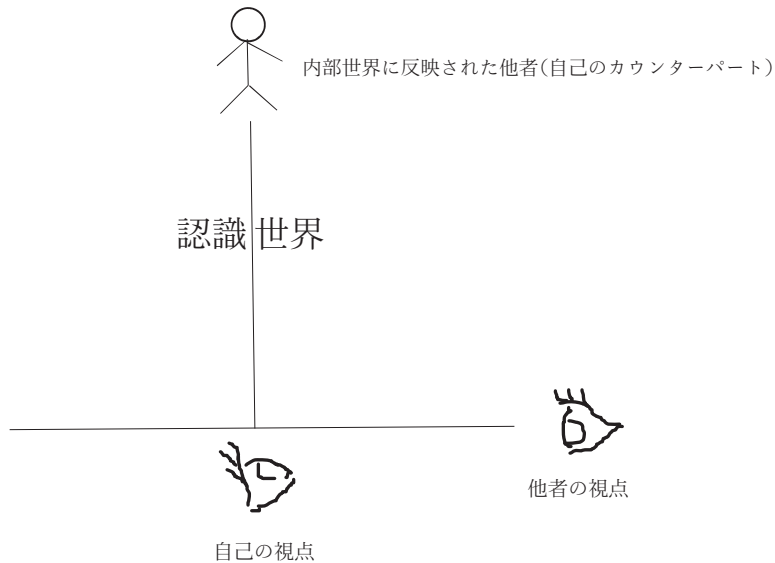


図5

それはまた、自己世界を取り巻く他次元という概念にもつながる。このあたりのことが実数と虚数の

複合である複素数平面に潜在的に反映されていることも、前稿で触れた。ここでは今一度、(1) のベキ乗場が複素数平面上にどう写像されるのかを示し、より視覚的な具体的モデルを描いてみよう。

(1) のベキ乗場は、数学的には1の n 乗根に見立てられる。それは複素数平面上では、半径1の円周となる。そこに虚数 i という他者の視線が交叉し、実数線上に切れ目を入れ数を生み出す。図示すれば次のようになる。

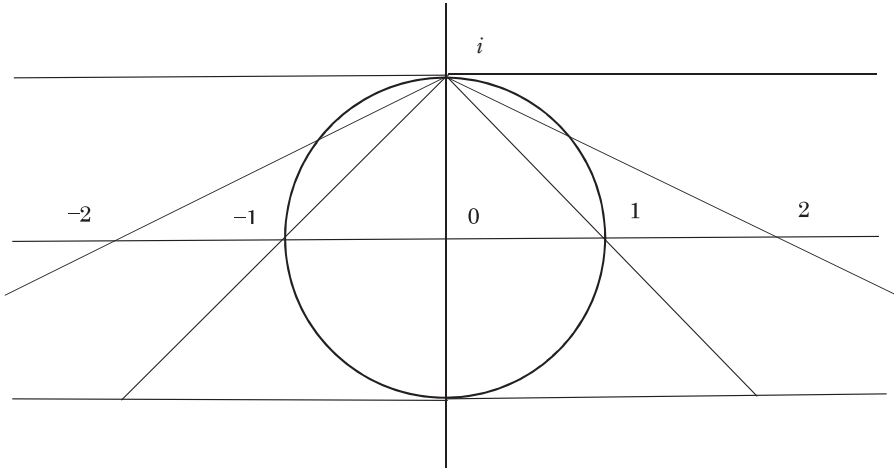


図6

視線は下から、すなわち $-i$ から来てもよい。図5で左に他者の視点を想定してもよいのと同断である。この図6では他者（の反映）が負数として正数の自己と対峙している。いわば客観図である。これを他者も自己の内部に取り込んだ主観図にするには、一乗が逆数になることを利用して正の分数としてやればよい。というより、これが一乗の認識論的な意味であり、内なる他者なのである（ちなみに、 -1 から0、すなわち他者の内面は、自己の1から ∞ に写像されている。他者の内部とは自己の外部である）。

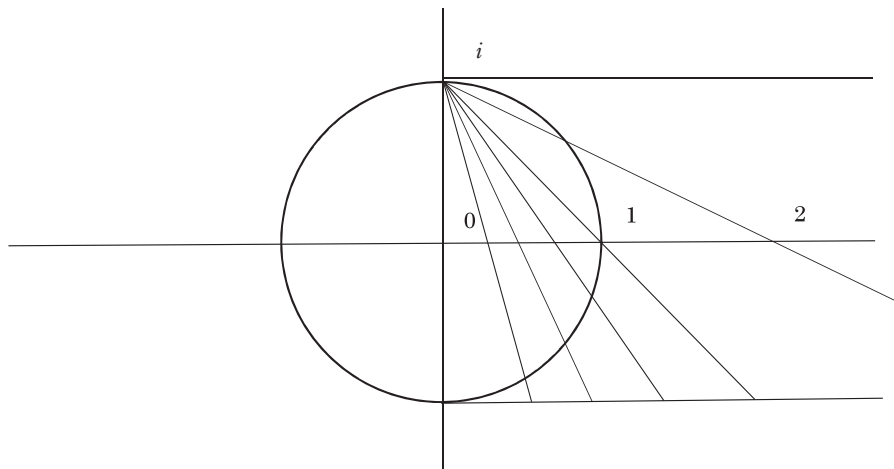


図7

他者と交換するいわゆる客観情報が、1を加算的に積みあげた集合論的形（(1) のベキ乗場の表層）

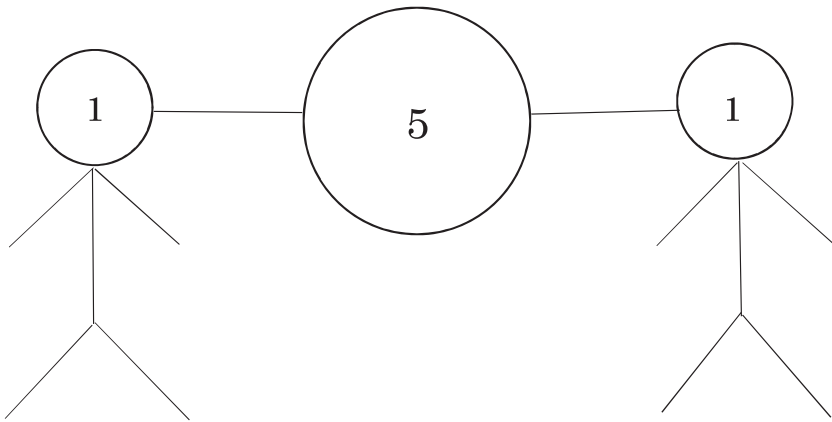
をしているのは、存在同士の1対1の対等性を表しているのであろう。しかし、その情報が交換可能であるのは、(1)のベキ乗場の下層、(1)の乗算（存在そのものの絡み合い）があるからなのである⁹⁾。

この図をもとに境界というものを改めて考えてみよう。境界はふつう一本線で描かれるが、それだけで境界をなしているといえるであろうか。それはあるがままでは、あくまで一本の線であろう。それほど境界とは、概念的なものである。実は境界とは、それを横切る視線、それを見下ろす視線があってこそ、複数の領域を分ける境界となる。ちょうど複素数平面の虚数軸と実数軸が作る十字のように。それだからこそ自己（＋）と他者（－）の重ね合わせを表現でき、内部か外部か、あるいは、中間の第三項か、といったおよそ境界の概念からかけ離れた議論を超えて、独自の存在感を主張できるものとなるのである。上図を見ても分かるとおり、他者の視点 i は0（無）と1（有）と無限遠点（無限）が重なる、まさに鶴的な場所である。そしてその外には、絶対的外部（コウモリそのものであること、机そのものであること、他者そのものであること、要するに「私」以外の何かそのものであること）が、決して囲い込めない地として広がっている。これがこの世界を縁取る境界であり、自己と他者が織りなす「私」という物質そのものである状態（何かであるそのこと）、すなわち認識の内部表現である。ゆえに境界とは、モノとモノとの間に生じるものではなく、むしろ、捉えどころのない存在（地）に切れ目を入れることによってモノ（絵）を生み出す機構（枠組み）といえるであろう。機構という抽象的に聞こえるが、これが身体というモノそのもののあり方（内部状態）である。

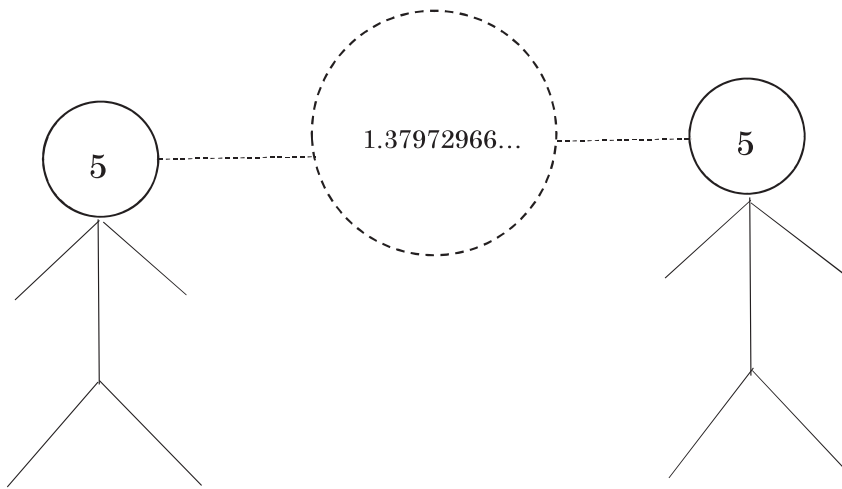
共有から協調へ

最後に、この(1)のベキ乗場モデルの視点から、新たな知識像を提出して本論を締めくくりたいと思う。本論の冒頭でも述べたが、筆者はこの「新たな認識論理の構築」シリーズを、共有知識の形式化を目標に始めた。「知っている」ことを「知っている」共有知識は無限連言の形で表せ、どこまでいっても囲い込めない無限集合を思わせる。それだからこそオーマンの、何かゲンツェンの手法に似た、状況の外枠から内にたどり共通理解の核を見出すことで共有知識の定義とする理論が、有効とされてきたのであろう¹⁰⁾。ただ、それにしてから、もっと大枠の、人間の相互理解の基盤となるような共有知識については、それを想定しながら正面切って論じていない点が、ゲンツェンの手法と同じ物足らなさを感じさせる。これらはいずれも、集合論的世界像に根差した限界といえよう。そこで、対数的数概念なのである。

今日のデジタル社会に則り、知識（情報）を何らかの数だと見なせば、集合論的には、加算されてきた数（要素が集まってできた集合）を複数エージェントが共有するというイメージとなろう。これに対し、対数的数概念で見ると、知識はエージェント同士の協調という現象になる。これにより、何か客観的にはっきりと特定できない情報の共有知識であっても表現しやすくなるであろう（たとえば、以前から指摘しているように、当事者同士が、「今の見た。」「うん、俺も見た」といい合うケース。これを第三者が特定の情報を対象に設定して論じることは難しかろう）。イメージ図を掲げておけば、次のようになろうか。



客観的(集合的)知識像 共有モデル



主観的(対数的)知識像 協調モデル

図8

集合論モデルでは、各自独立した1なるエージェントが5という客観的情報にアクセスしこれを共有するわけだが、対数モデルでは、主観的に揺れ動く底が同調し各エージェント内部に5を生成するというイメージである。対数的数概念とは、最小単位1を加算的に積みあげていって構成される集合的数概念 $1n$ とは違って、 $x^n = n$ というべき乗で自然数を表現しようというものであった。これにより任意の自然数は真数と対数という二重の見方ができ、そこに自己と他者の概念を当てはめ、認識のあり方をよりの確に表象できる数概念が可能となると考える。そこでは、最初から決まった最小単位1

があるのではなく、 x (底)は $\sqrt[3]{3} = 1.44224957\dots$ を最大として限りなく1に近づく。そしておそらく、 $\sqrt[\infty]{\infty} = 1$ となり再帰的に $\sqrt[1]{1} = 1$ と手を結び境界を完結する。その変化の一部を再録しておく¹¹⁾。

$$\sqrt[1]{1} = 1$$

$$\sqrt[2]{2} = 1.41421356\dots$$

$$\sqrt[3]{3} = 1.44224957\dots$$

$$\sqrt[4]{4} = 1.41421356\dots$$

$$\sqrt[5]{5} = 1.37972966\dots$$

$$\sqrt[6]{6} = 1.34800615\dots$$

$$\sqrt[7]{7} = 1.32046924\dots$$

$$\sqrt[8]{8} = 1.29683955\dots$$

$$\sqrt[9]{9} = 1.276518007\dots$$

$$\sqrt[10]{10} = 1.25892541\dots$$

.

.

$$\sqrt[100]{100} = 1.04712854\dots$$

.

.

$$\sqrt[1000]{1000} = 1.006931166\dots$$

.

.

$$\sqrt[\infty]{\infty} = 1?$$

これを図8に当てはめると、無限は、共有モデルのように何か外部の超越的存在ではなく、単純な1を底として両エージェントの内部に立ちあがる認識の極限である。ここにはまさに、原初存在と生まれ出る存在を表す1と、そこに限りなく近づく過程の最終点にある（小数点以下が0になる）無と、その過程をまるごと包み込む無限が、同時に現出している。それはあらかじめあるモノの間に生じる狭間でも、それらをくくる外枠でもなく、むしろモノを生じさせる場のごときものである。こう捉えることによって境界は、集合論的解釈につきまとっていた要素と概念、部分と全体、有と無をめぐる積年のパラドクスを克服し、認識像、知識像に新たな地平を切り開く足掛かりとなってくれる¹²⁾。認識とは、知識とは、従来考えられていたように、あらかじめあるモノを忠実になぞりエージェント間で共有する類のものではなく、揺れ動く底の協調によりエージェント内部にそのつど生じるものである。よって認識論の要諦は、いかに個人が世界を忠実に認識できるか、ではなく、いかに複数者間で世界は調整されるか、ということになる。その思索を根底で支えてくれると期待されるのが、対数的数概念なのである。今後は、その底の変化の意味についても、より論考を深めてゆきたいと考えている。

結語

冒頭にも書いたとおり、筆者は本篇をもって14作（序論を入れれば15作）を数える「新たな認識論の構築」シリーズにおいて多少の軌道修正（あるいは迷走）は経てきたが、現在の基本姿勢は確定的で最終的なものにいったと考えている。それを今一度簡潔にまとめておこう。

世界には二つの存在の仕方がある。「モノがある」ことと、「モノである」ことである¹³⁾。前者は言語表現可能であるが、後者は言語表現ほぼ不可能である。それは、言語が指示記号と指示対象の関係性の中で意味を獲得する表現手段だからである。言語にとって、モノを外から描写説明することはたやすいが、モノそのものである状態を語ることはきわめて困難である。だが、この世界に存在する限り何かであることは避けられない。机そのもの、コウモリそのもの、筆者の周りにはモノそのものがある。かくいう筆者も人間そのもの、私そのものである。いや、今便宜的に「人間」とか「私」といった言葉を使ったが、それ以前に、「何かそのもの」なのである。ここでいう「何か」とは、「あの何か」あるいは「この何か」ということではなく、まさに存在の根本条件「何かであること」そのものの謂いである。ゆえに、どうして「私」であって、「あなた」、「彼」、「彼女」ではないのか、という存在論的自己に関する哲学問題も、後づ的に立ちあがった世界認識に過ぎない。特定の（言語表現された）何かが最初にあったわけではないのである。こうしたことを、完全にではなくとも、何とか言語表現にのせられないか。というのも、学問に携わる者である限り、徹底して言語表現を目指すということは避けられぬ使命と思われるからである。また、これにより、学問全体を覆う究極のアポリア、心身問題にけりをつけられると期待するからである。今後脳科学の発達により、精神というものが物質的側面から説明される度合いは増してゆくであろうが、何か物足りなさが残る最終的に解消されることはないと思予想する。それはやはり、物質還元的な表現ではなく物質自体であることの表現方法を獲得していないことに起因するであろう。筆者には今や、精神とか心といった物質と異なるものと見なされがちな特別な存在は、モノそのものであることの表現困難さからくる、もっぱら言語上の想像概念であるように映る。ちょっと思い描いてもらいたいが、「私」という言葉を取り払ってしまえば、外部世界と内部世界の区別などいかに堅固なものといえようか。すべては、「モノがあること」と「モノであること」のモノの世界に収斂する。そこで求められるのは、概念をモノとして語る言語である。われわれの世界認識は概念で構成されている。それをモノとしてできうる限り形式的に（モノは形である）語れば、別言すれば、絵だけでなく地も取り込んだモノそのもののあり方を表現できれば、少なくとも「人間」そのものである状態を語る言語には近づけるであろう。

ここで、それは結局、自己言及のパラドクスに陥るのがそれこそオチだという声が聞こえてきそうだが、それは大丈夫である。確かに、「私」という認識の座は、「モノがある」ことと「モノである」ことのせめぎ合いの場であるが、それが矛盾と映るのは、あくまで「私」という意識にこだわるからである。われわれの内的あり方は、純粋な一枚岩の自己ではなく、他者意識との混合体である。この状態は、「他者というモノがあり、私というモノである」といい表せる。いわゆる客観、主観と称される視点である。その視点転換の容易さが、自己言及的狀況に満ちた現実生活の中でわれわれを論理的にフリーズさせずにスムーズに動かしている要因である。このとき、筆者の新提案が、両者は180

度で対峙しているのではなく、90度で直交しているということであった。それが境界という場であり、だからこそ転換は容易なのである。そして、数学の複素数平面をその概念的表現であると見なしたように、概念をモノとして語る言語とは、要はこうしたことを指す。筆者が専門でもないのに数学の言語に着目するのは、それが直接の指示対象をもたない最も抽象的な言語だからであり（あえて指示対象をあげれば、それが集合だったわけである）、概念自体をモノとして語るうえでの究極の素材といえるからである。また、その高度の抽象性が、モノを外部から描く日常言語とは違って、逆にモノそのものであることを表出しているように思えるからである。ゆえに、これからも数学概念のモノ化を進めてゆこうと考えている。

註

- 1) 鈴木啓司2011,「新たな認識論の構築6—認識論的に見た数体系の再解釈—」,名古屋学院大学論集(人文・自然科学篇) Vol. 47 No. 2. pp. 51-61.
- 2) チャールズ・サイフェ 2009,『異端の数ゼロ—数学・物理学が恐れるもっとも危険な概念』,林大訳,早川書房。
- 3) 境界としての0は、宇宙そのものについてもいえる。物理学的に物質の定義は、「質量のあるもの」ということになるが、その中において光(光子)は唯一質量0である(そのため宇宙の上限値30万km/秒の速度に達せられる)。とはいえ、光は物質でないということではない。あくまで質量0の値をもった、物質世界の存在である。いふならば、観測にかかるこの宇宙(物理的認識世界)の境界をなしているのが、光なのである。
- 4) ラッセルのパラドクスは周知だと思われるが、「自らを要素としない集合をすべて集めてできた集合は、自らを要素とするであろうか」というものである。たいていの集合が「自らを要素としない集合」である。たとえば、「犬」という集合の要素は、柴犬だったりブルドッグだったり、あるいは飼い犬のポチというように、何か具体的な個体である。決して「犬」のアイデアなるものは含まれない。こうした集合全体を考えた場合、要素と「する」と仮定すると「しない」という定義に反し、「しない」と仮定すると「する」を要請されるわけである。これは、「すべての集合の集合」という、無限を囲い込む思考実験に必然的に伴う問題である。では他方、「自らを要素とする集合」とは何であろうか。たとえば、「言葉」という集合はどうであろう。「言葉」というのも言葉である。また、「私の思考」という集合は。「私の思考」も私の思考の一部である。こうした集合の場合、パラドクスは起こらない。「自らを要素とする集合をすべて集めた集合は、自らを要素とする」のである。ここに筆者が冒頭で触れた、「私」と「言語」をめぐる存在の本質的姿が露呈されているように思える。こちらが本来の根底的あり方であり、それを集合論は、要素と概念に分けてこの世界を裁断し形式的に取り扱い簡単にしようとする。その手法が根源的なところで挫折するのは、目に見えているであろう。ちなみに、ラッセル自身のパラドクスの解決法は、1階に対して2階、集合に対してクラスと、要するにレベルとメタレベルを分け、これを混同しないようにするというものだったが、それが問題の永遠の先送りであるということは容易に察せられよう。事実、ゲーデルの不完全性定理も、一般にはヒルベルトの形式主義の夢を打ち砕いたとされるが、論文自体はラッセルの方法論をターゲットに据えたものであった(原論文タイトル「プリンキピア・マテマティカおよび関連した体系の形式的に決定不能な命題についてI」)。「プリンキピア・マテマティカ」は、ホワイトヘッドとラッセルの共著になる論理主義数学のバイブル)。
- 5) それが可能なのは、順序数がそれ以下の順序数をすべて含んだ集合と見なされているからである。順序数をくく(論理的証明)とは、あらかじめあるものを次々と取り出すことである。さらにつけ加えると、この証明の過程がコンピューターのプログラムそのものであることを指摘したのが、カーリー＝ハワード対応である。確

かにプログラムとは、順序を踏んで織り込みずみどおりに内部状態を改変し、エンド (0) にいたる一連の「段取り」といえよう。

- 6) 正式な定義をあげておくと次のようになる。空でない集合 A に対し、 A 上のフィルターとは、次の条件を満たす A のベキ集合の部分集合 F のことをいう。(a) $A \in F$ かつ $\emptyset \notin F$ (b) $\forall X, Y \in F (X \cap Y \in F)$ (c) $\forall X \in F \forall Y \subset A (X \subset Y \rightarrow Y \in F)$ ちなみに、フィルターの対概念イデアルの定義は、同じ設定で次のような部分集合 I のことをいう。(a) $\emptyset \in I$ かつ $A \notin I$ (b) $\forall X, Y \in I (X \cup Y \in I)$ (c) $\forall X \in I \forall Y \subset A (X \supset Y \rightarrow Y \in I)$ こちらはベキ集合から元集合自体という要素を取り除いたものである。集合は要素と概念(枠)でできているといったが、その枠を要素として取り込んで元集合を拡張したのがベキ集合であり、そこから要素だけを拾いあげたのがフィルター、枠だけを拾いあげたのがイデアルと、多少強引にイメージできようか。
- 7) さらにいうと、ルベグ積分などに出てくる測度という概念も、集合論に属する限り境界の問題にかかわっているように思える。測度とは、長さや面積を従来の「内側から測る」というのではなく、「外側から覆う」という手法で捉え直そうというものだ。簡単にいうと、対象となる線や図を無限の極小切片で覆い、その合計を長さや面積と考えるのである。こうした発想が求められる背景として、次のような問題がある。われわれは数学的には一辺 $1m$ の正方形を二つ合わせて $2 \times 1m^2$ の長方形になると当然のごとく納得しているが、現実には、二つの正方形を合わせたものと、最初から長方形だったものとは、接着面のあるなしという違いが生じるであろう。数学的にこの合わせ目はどう考えたらよいのか。内側から面積をたどると、どうしてもかような境界の問題にぶつかるのである。それを「外側から覆う」と捉えると、境界は内か外かの問題に悩まなくてもよい。面積は覆う「薄皮」の内部にまるごと包み込まれるのである。以上は、測度に対する筆者の管見である。
- 8) 鈴木啓司 2016, 「新たな認識論の構築 13—主観の 2 視点 3 次元モデル—」, 名古屋学院大学論集 (人文・自然科学篇) Vol. 52 No. 2 pp. 23-36.
- 9) コミュニケーション成立の要諦に関しても、(1) のベキ乗場は有益な示唆を与えてくれる。足し算は論理計算では選言 (「あるいは」) を、掛け算は連言 (「かつ」) を表すが、今、真に 1 を、偽に 0 を当てはめ、無限選言、無限連言の式を考えてみよう。 $0 + 0 + 0 + 1 + 0 \dots = 1$ $1 \times 1 \times 1 \times 0 \times 1 \dots = 0$ というように、選言は一つでも 1 (真) があれば全体は真になるのに対し、連言は一つでも 0 (偽) があると、換言すれば、すべてが 1 (真) でないと、全体は真にならない。これは、無限選言は真であれば証明の方法があり (1 を見出せばよい)、偽であれば証明の方法はない (無限の彼方まで 1 が出現しないことを確かめなければならない) ことを意味する。他方、無限連言は真であれば証明の方法はなく (無限の彼方まで 0 が出現しないことを確かめなければならない)、偽であれば証明の方法はある (0 を見出せばよい)。交換する情報は選言形式の方が適していることはうなずけよう。なにせ真なることには証明があった方が説得力があるからだ。ただ、そもそもその交換の場が成立するには、偽であることが証明されない限りはとりあえず真であると信じよう、という姿勢が互いになければならない。ここに、見知らぬ者同士がコミュニケーションの第一歩を踏み出す基盤があるといえよう。
- 10) Robert J. Aumann, Agreeing to Disagree, in R. J. Aumann's *Collected Papers*, Vol1, MIT Press 2000, pp. 593-596.
- 11) より詳細な表は、次を参照されたい。鈴木啓司 2013, 「新たな認識論の構築 9—共有知識の新定義 (続き)—」, 名古屋学院大学論集 (言語・文化篇) Vol. 24 No. 2 pp. 199-207.
- 12) たとえば、部分と全体の問題でいうと、集合論的な自然数では共通最小単位 1 を加算して構成されているため、部分を見ても全体は分からない。だが、対数的自然数なら、 $100 = {}^{100}\sqrt{100} = 1.04712854 \dots$ という具合に、部分が全体を表している。機械的な部分と全体の関係ではなく、有機的な部分と全体の関係が現れているといえまいか。また、量的な変化ではなく、質的な変化をそこに見てとることもできよう。身体に根差す数学を考えるうえで、対数的数概念を推すゆえんである。
- 13) つらつら考えるに、これは結局、カントのいう純粋理性と実践理性にあたるのではないか、という気がしてきた。

「モノ」を認識する純粹理性は人間というフィルターがかかっているため、「モノそのもの」に触れることはできないが、人間という「モノそのもの」であることの實踐理性は、その閉塞状況を打破する導き手となってくれるのである。認識論はやはりカントに始まりカントに帰るという感があるが、ただ、筆者は、問題をさらに深化させ、「モノそのもの」であることの實踐論を語る言語ではなく、「モノそのもの」であることを体現する言語を築きたいのである。

参考文献

- ケネス・キューネン2008,『集合論 一独立性証明への案内一』,藤田博司訳,日本評論社。
- ケネス・キューネン2016,『キューネン数学基礎論講義』,藤田博司訳,日本評論社。
- A. カナモリ1998,『巨大基数の集合論』,渕野昌訳,シュプリンガー・フェアラーク東京。
- ポール・コーヘン(本論中のコーエン)1990,『連続体仮説』,近藤基吉,坂井秀寿,沢口昭幸訳,東京図書。
- 照井一成2015,『コンピュータは数学者になれるのか 一数学基礎論から証明とプログラムの理論へ一』,青土社。
- 別冊ニュートン2015,『こんなに便利な指数・対数・ベクトル』,ニュートンプレス。